

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ

А. Л. БОБРОВ

**ПОСОБИЕ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ
В ВУЗЫ**



1991

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ

А. Л. БОБРОВ

ПОСОБИЕ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ
В ВУЗЫ

1991

Рецензенты — Л. Е. ЕВТУШЕК, доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
К. В. МАЛЬКОВ, доктор физико-математических наук, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова

Это пособие написано на основе курса лекций по элементарной математике, который А. Л. Бобров на протяжении ряда лет читает для абитуриентов в Лектории Московского государственного университета. Практика показала, что все слушатели, освоившие предлагаемый курс, успешно сдают вступительные экзамены в МГУ им. М. В. Ломоносова и другие московские вузы.

При этом наибольший эффект достигается тогда, когда основной упор делается на унифицированные методы решения задач при четком соблюдении всех формальных требований.

Предполагается, что читатель знаком с базовыми положениями программы по элементарной математике: владеет основными теоремами и формулами. Задачей же настоящего пособия является углубление практической подготовки и усвоение методических навыков для успешной сдачи конкурсного экзамена по элементарной математике.

Действительно, невозможно перерешать все задачи, но вполне реально освоить конечное число универсальных методов решения, с помощью которых решить большое количество задач. Надо лишь четко понимать, на какой класс задач ориентирован тот или иной метод.

Все задачи, являющиеся примерами, или данные для самостоятельного решения взяты из вариантов, предлагавшихся на экзаменах в вузах страны в 1965—1990 годах. В последнем разделе пособия приводятся варианты для самостоятельного решения. К этому разделу следует приступать лишь после полного освоения всех предыдущих.

Отметим, что пособие написано простым, доступным, но вместе с тем строгим и четким языком. Кроме того, в нем присутствуют разделы: «Задачи с параметрами», «Целочисленные задачи», «Задачи на наибольшие и наименьшие значения», которые не всегда бывают полно изложены в школьном курсе и вызывают трудности на экзаменах.

Директор Подготовительных курсов
МГУ им. М. В. Ломоносова
В. Е. СВИНТИЦКИХ

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Алгебраические уравнения первой, второй и четвертой степени	5
1.1. Уравнения первой степени	5
1.2. Уравнения второй степени	8
1.3. Уравнения четвертой степени	13
2. Алгебраические неравенства	16
2.1. Краткая теория неравенств	16
2.2. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим	17
3. Иррациональные уравнения и неравенства	23
3.1. Иррациональные уравнения	23
3.2. Иррациональные неравенства	26
4. Логарифмические и показательные уравнения	32
5. Тригонометрические уравнения	39
6. Целочисленные задачи	46
7. Применение производной в решении задач	55
8. Методы решения задач на наибольшие и наименьшие значения, не использующие производную. Неравенства в геометрии	59
9. Задачи с параметрами	65
10. Варианты конкурсных письменных работ	76
Ответы к задачам разделов 1—9	116
Рекомендуемая литература	116

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ, ВТОРОЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

На вступительных экзаменах абитуриент должен хорошо разбираться в теории и уметь правильно решать линейное и квадратное уравнения, а также сводимые к ним некоторые модификации алгебраического уравнения четвертой степени.

1.1. Уравнения первой степени

Уравнением первой степени (линейным) называется выражение вида

$$ax + b = 0. \quad (1)$$

Казалось бы, никаких сложностей его решение не должно вызывать. И если любому школьнику предложить решить уравнение, которое является числовой модификацией соотношения (1), то он легко сделает это. Например, решая уравнение $2x + 8 = 0$, школьник скажет, что его корень $x = -4$. Какие действия при этом выполняются? Восьмерка переносится в правую часть, и производится деление левой и правой частей на 2 (коэффициент при x). Но в соотношении (1) так поступить нельзя. Ведь при этом на втором шаге нам пришлось бы делить на коэффициент при x , равный a . Это можно делать лишь тогда, когда мы знаем, что a не равно нулю. В то же время в общем случае a может равняться нулю. Поэтому общая схема исследования линейного уравнения с параметрами a и b состоит из совокупности следующих трех шагов.

1.1.1. Если $a = b = 0$, то уравнение принимает вид: $0 \cdot x + 0 = 0$. Следовательно, каким бы ни было значение x , левая и правая части тождественно равны. Значит, в этом случае решением будет являться любое действительное число, а количество решений будет бесконечным.

1.1.2. Если $a \neq 0$, а $b \neq 0$, то уравнение принимает вид: $0 \cdot x + b = 0$. Следовательно, каким бы ни было значение x , левая часть будет равна b , а правая — нулю. Значит, в этом случае уравнение не будет иметь решения, а количество решений будет равняться нулю.

1.1.3. И только в том случае, если $a \neq 0$, мы имеем право проделать ту же процедуру, которую мы проделывали с числовой модификацией уравнения и получить единственный корень $x = -b/a$.

Таким образом, с точки зрения количества корней, в линейном уравнении может быть поставлено три вопроса: при каких значениях параметров a и b уравнение имеет бесконечно много, ни одного или единственное решение? Может быть поставлен и еще один вопрос, который является следствием этих трех и объединяет первый и третий случаи: при каких значениях параметров a и b уравнение имеет хотя бы одно решение? Отметим, что поскольку совокупность условий 1.1.1—1.1.3 является полной (т. е. рассматривает все возможные случаи с точки зрения корней уравнения), то ответом на этот вопрос является либо объединение случаев 1.1.1 и 1.1.3 (в этом случае уравнение будет иметь одно или бесконечно много решений), либо отрицание случая 1.1.2. То есть на практике следует рассмотреть случай, когда уравнение не имеет решений, и взять его отрицание.

Иногда предложенную схему исследования линейного уравнения приходится применять в «чистом» виде. В этом случае необходимо просто рассмотреть какой-то конкретный случай. Но чаще приходится иметь дело с линейными уравнениями, для анализа которых также приходится применять этот подход.

Рассмотрим следующий пример: при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (2-a)x + a^2y = 3a^2 + 2; \\ (2a-1)x + ay = a-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Поскольку данная система является системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными, то метод решения состоит в следующем. Надо взять любое из этих уравнений и выразить одну неизвестную величину через другую. Затем это выражение подставить в оставшееся уравнение. В результате получится одно линейное уравнение с одним неизвестным, которое следует исследовать с помощью схемы 1.1.1—1.1.3. Отметим, что важным моментом является условие равносильности всех проводимых преобразований. Только в этом случае к полученному уравнению можно поставить тот же самый вопрос, что и к исходной системе, и ответ, полученный на последнем этапе, будет ответом всей задачи.

Рассмотрим, как происходит реализация метода в данном конкретном случае. Заметим, что в каждом из уравнений неизвестная величина умножается на коэффициент, зависящий от параметра a . Следовательно, если мы сразу же начнем выражать одну переменную через другую, то в знаменателе этого выражения будет стоять коэффициент перед выражаемой переменной,

который при определенных значениях параметра a будет равен нулю. Как известно, на нуль делить нельзя. Как быть? Можно поступить так же, как и в линейном уравнении: отдельно (до деления) рассмотреть равенство нулю этого коэффициента. С учетом этого решение будет следующим (выражая в первом уравнении y через x).

Пусть $a=0$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 2x + 0 \cdot y = 2; \\ -x + 0 \cdot y = 1, \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел $(1; y)$, т. е. $x=1$, а y — любое действительное число. Это значит, что при $a=0$ система имеет бесконечно много решений. Следовательно, $a=0$ есть одно из решений.

Пусть $a \neq 0$, тогда мы имеем право в первом уравнении выразить y через x :

$$y = \frac{3a^2 + 2 - x(2 - a)}{a^2}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение и после преобразований получим следующее линейное уравнение:

$$2x(a^2 - 1) + 2a^2 + a + 2 = 0.$$

Данное уравнение не имеет решений, когда коэффициент при переменной x равен нулю, а свободный член не равен нулю. Это приводит нас к следующей системе:

$$\begin{cases} 2(a^2 - 1) = 0; \\ 2a^2 + a + 2 \neq 0. \end{cases}$$

Полученная система имеет решение при $a = \pm 1$. Мы должны взять отрицание этого условия, т. е. $a \neq \pm 1$. Обратим внимание, что это включает в себя и первый случай, когда a равнялось нулю. Поэтому окончательным ответом является условие $a \neq \pm 1$. Замечание: наш вывод был отрицанием условия о том, что уравнение не имеет решения. Базируясь на этом, мы и получили окончательный результат. Но вполне могла быть допущена арифметическая ошибка при проведении промежуточных преобразований. Поэтому, чтобы осуществить самоконтроль, убедимся в том, что при $a = \pm 1$ система действительно не имеет решений. Для этого подставим в систему сначала значение $a=1$. Система примет вид:

$$\begin{cases} x + y = 5; \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Левые части системы равны, а правые — нет, значит, система не имеет решений. Такой же вывод мы получим и при значении $a = -1$. Теперь мы убеждены в том, что при $a = \pm 1$ система не имеет решений и можем смело записывать окончательный ответ.

Задания для самостоятельной работы к разделу 1.1

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$a^2(x+1) + 2(a-2x-4) = 0$$

имеет единственное решение?

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$a^2(x+5) + 8a - 13 - x = 0$$

имеет бесконечно много решений?

3. При каких значениях параметра a уравнение

$$a^2(x+1) + 3(a-3x-6) = 0$$

имеет хотя бы одно решение?

4. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 6a - 2; \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений?

5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} ax + 3y = a + 5; \\ ax + (a+2)y = 3a + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Решить систему

$$\begin{cases} ax + y = a; \\ x + y = 1 \end{cases}$$

для всех значений параметра a .

7. Найти все значения параметров a и b , при которых система

$$\begin{cases} ax + by = a - b; \\ bx - b^2y = 1 + b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

1.2. Уравнения второй степени

Уравнением второй степени (квадратным) называется выражение вида

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (2)$$

Обычно полагают, что $a \neq 0$. Это не очень сильное допущение. Ведь если $a=0$, то мы просто имеем линейное уравнение, схема исследования которого дана в предыдущем разделе. Корнями уравнения (2) называются такие значения переменной x , которые при подстановке в левую часть уравнения обращают ее в нуль. По аналогии со схемой исследования линейного уравнения мы можем сразу же записать первый случай схемы исследования квадратного уравнения:

1.2.1. Если $a=b=c=0$, то каким бы ни был x , левая часть уравнения всегда будет равна нулю. Следовательно, в этом случае квадратное уравнение имеет бесконечно много решений. Для дальнейшего анализа рассматривается величина, которая называется дискриминантом: $D=b^2-4ac$.

1.2.2. Если $D < 0$, то уравнение не имеет решений.

1.2.3. Если $D=0$, то уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{-b}{2a}, \quad a \neq 0.$$

1.2.4. Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных решения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad a \neq 0. \quad (3)$$

Таким образом, количество чисел, которые могут быть корнями уравнения (2), может равняться бесконечности, нулю, единице и двум. Речь здесь и в дальнейшем будет идти только о действительных числах. На практике, когда речь идет о решении квадратного уравнения без параметров, необходимо рассматривать только последние два случая. Полная схема исследования уравнения (2), содержащая все четыре случая, используется при решении квадратных уравнений с параметрами, причем первый случай рассматривается лишь тогда, когда коэффициент a может принимать нулевое значение. Кроме того, на практике часто бывает полезно использовать метод, который автор называет «Методом замены квадрата линейной частью». Суть его в следующем: если какое-то значение x является корнем квадратного уравнения, то соотношение (2) выполняется как тождество. Но тогда можно выразить x^2 через значения параметров a , b и c , а также первую степень x :

$$x^2 = \frac{-bx-c}{a}. \quad (4)$$

Это соотношение и есть суть этого простого метода, который позволяет существенно облегчить решение многих задач.

Кроме того, абитуриенту полезно знать еще две модификации формулы нахождения корней (3).

1.2.4.1. Во-первых, при $a=1$. Такое уравнение называется **приведенным квадратным уравнением**:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

1.2.4.2. Во-вторых, при четном значении b . После простейших преобразований (читатель легко может проделать их самостоятельно) получится формула, в которой под радикалом будет стоять величина, вчетверо меньшая дискриминанта. Эта модификация формулы (3) называется **формулой расчета корней через $D/4$** :

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}, \quad b = 2m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для успешного решения уравнений следует также повторить теорему Виетта. Рассмотрим примеры на решение квадратных уравнений. Условимся только, что впредь при решении алгебраических уравнений меньшим индексом будем обозначать меньший корень.

Пример 1. Решить уравнение: $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

Так как коэффициент при x^2 не равен нулю, то случай 1.2.1 невозможен. Поэтому рассчитаем, чему равен дискриминант: $D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 1$. Дискриминант положителен, значит уравнение имеет два различных решения:

$$x_1 = \frac{7-1}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3}.$$

В принципе на этом решение можно закончить. Но мы все-таки рекомендуем сделать проверку, либо, подставив найденные корни в исходное уравнение, убедиться, что оно действительно обращается в тождество, либо воспользоваться теоремой Виетта. Проверка поможет исключить возможные арифметические ошибки, которые довольно часто допускаются школьниками в условиях стресса на письменном экзамене.

Пример 2. Решить уравнение: $|x^2 - 2x - 1| = \frac{5x+1}{3}$.

Здесь мы впервые сталкиваемся с такой функцией, как модуль. Как правило, решение таких задач следует начинать с раскрытия модуля. Для этого необходимо рассмотреть два случая: первый — подмодульная функция неотрицательна, второй — отрицательна. Следствием каждого из этих случаев будет квадратное уравнение, корни которого надо проверить на выполнение того условия, при котором получено это квадратное уравнение. При этом совсем необязательно решать неравенства, которые предопределяют оба случая, как это часто делают школьники,

и затем смотреть, попадают или нет корни в области решений этих неравенств. Повторим, что нам достаточно лишь проверить правильность этих неравенств с полученными корнями. С учетом сказанного решение будет следующим.

Первый случай. Пусть $x^2 - 2x - 1 \geq 0$, тогда уравнение принимает вид: $x^2 - 2x - 1 = \frac{5x+1}{3}$ или после упрощений: $3x^2 -$

$-11x - 4 = 0$, что аналогично уравнению из примера 1. Корни последнего уравнения: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 4$. Подставляя эти значения в

неравенство, убеждаемся, что ему удовлетворяет только второй корень. Поэтому решением первого случая будет только одно значение $x = 4$. Неравенство можно проверить также, используя метод замены квадрата линейной частью. Проверяем неравенство для корней квадратного уравнения $3x^2 - 11x - 4 = 0$, значит, $x^2 = \frac{11x+4}{3}$. Подставляя это выражение в неравенство, после

упрощений получаем неравенство: $5x + 1 \geq 0$ или $x \geq -\frac{1}{5}$. Совершенно очевидно, что этому неравенству удовлетворяет только

второй корень уравнения. Заметим правда, что в данном случае метод замены квадрата линейной частью по трудоемкости был таким же, как и простая подстановка корней уравнения в неравенство. Но тем не менее его можно считать проверкой правильности результата.

Второй случай. Пусть $x^2 - 2x - 1 < 0$, тогда уравнение принимает вид: $-x^2 + 2x + 3 = \frac{5x+1}{3}$ или после упрощений:

$3x^2 - x - 2 = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$. Убеждаем-

ся, что неравенству удовлетворяет только второй корень. Таким образом, окончательным ответом всего уравнения будут значения: $x = 1$ и $x = 4$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = 24.$$

Если абитуриент поспешит раскрыть скобки, то он получит уравнение четвертой степени общего вида, решить которое можно, например, разложив это уравнение на два квадратных трехчлена. Но если подумать, то можно обратить внимание на то, что произведение первой скобки на вторую равно $x^2 + 5x + 6$, а третьей на четвертую — $x^2 + 9x + 20$. Заметим, что коэффициенты при x равны сумме, а свободные члены — произведению свободных членов исходных сомножителей. Это наводит на мысль о том, что если перемножить отдельно крайние и средние скобки, то получатся выражения: $x^2 + 7x + 10$ и $x^2 + 7x + 12$, кото-

рые отличаются только свободными членами. Таким образом, если мы первый из этих сомножителей обозначим через y , то второй будет равен $y+2$. Мы впервые ввели новую переменную. Всегда, когда в этом возникает необходимость, нужно сразу же задавать область значений этой новой переменной. В данном случае y может быть любым действительным числом, а уравнение примет вид: $y(y+2)=24$ или после преобразований: $y^2+2y-24=0$, корни которого равны -6 и 4 . Возвращаясь к переменной x , получаем уравнения: $x^2+7x+10=-6$ и $x^2+7x+10=4$. Дискриминант первого из этих уравнений отрицателен, и поэтому оно не имеет действительных решений. Второе уравнение имеет два решения: -6 и -1 , которые и являются решениями исходного уравнения.

Пример 4. Найти все значения параметра a , для которых значения корней уравнения $x^2+x+a=0$ будут больше, чем a .

Условие предполагает, что уравнение, во-первых, должно иметь два различных решения. Значит, его дискриминант $1-4a>0$, отсюда $a<\frac{1}{4}$. Далее необходимо записать, что оба

корня $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$ строго больше, чем a . Решим неравенство для

меньшего корня: $-1 - \sqrt{1-4a} > 2a$. Так как радикал определен,

ведь мы уже получили условие $a < \frac{1}{4}$, перенесем его в правую

часть, а $2a$ — в левую: $-1 - 2a > \sqrt{1-4a}$. Так как левая часть должна быть больше правой, а радикал, стоящий в правой части, неотрицателен, то и левая часть должна быть положительна,

значит, $a < -\frac{1}{2}$. Теперь мы имеем право обе части неравенства

возвести в квадрат и после упрощений получим: $4a(a+2) > 0$.

Решая это неравенство методом интервалов, получаем значение $a > 0$ или $a < -2$. Таким образом, значение a должно подчиняться одновременно четырем условиям; выводя все их на числовую прямую, получаем $a < -2$. Аналогичное неравенство решаем для большего корня. Получаем, что $a < 0$. Так как оба корня уравнения должны быть больше, чем a , мы должны взять пересечение условий $a < -2$ и $a < 0$. Окончательное решение примера: $a < -2$.

Задания для самостоятельной работы к разделу 1.2

Решить уравнения:

1. $x^2+2x+5=0$;

2. $x^2-x-2=0$;

3. $(x+7)(x+15)(x+3)(x-5)=0$;

$$4. (x-2)(3x-1)=20(x-2);$$

$$5. (x+18)(2x-7)=(x+18)(x+1);$$

$$6. (x+1)(x-2)+(x+2)(x-3)+(x+3)(x-4)+(x+4)(x-5)=0.$$

$$7. \text{ Решить уравнение: } |x^2-4x+2|=\frac{5x-4}{3}.$$

8. Составить квадратное уравнение, первый корень которого равен произведению, а второй — сумме корней уравнения $2x^2+9x+7=0$.

9. Найти все значения параметра a , для которых сумма корней уравнения $x^2-a(x-1)+1=0$ равна сумме квадратов корней этого же уравнения.

10. Определить, для каких значений параметра a уравнение $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$ имеет ровно два решения.

11. Определить, для каких значений параметра a уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет ровно одно решение.

1.3. Уравнения четвертой степени

Среди уравнений четвертой степени мы выделим три типа, решение которых можно свести к решению квадратного уравнения: биквадратные, симметричные и возвратные уравнения.

1.3.1. **Биквадратным** называется уравнение вида: $ax^4+bx^2+c=0$. Здесь обычно полагают, что $a \neq 0$. Если же $a=0$, то уравнение принимает вид $bx^2+c=0$ и легко исследуется. При значении a , отличном от нуля, вводится новая переменная $y=x^2$ и уравнение принимает вид $ay^2+by+c=0$ при условии, что $y \geq 0$. Значит, решение биквадратного уравнения находится по формуле $x = \pm \sqrt{y}$, где y — неотрицательные решения последнего квадратного уравнения.

1.3.2. **Симметричным** уравнением назовем уравнение вида $(ax+b)^4+(ax-b)^4=c$. Это уравнение сводится к биквадратному после раскрытия скобок. Часто встречаются уравнения, которые можно назвать **почти симметричными**. Они имеют вид $(ax+b)^4+(ax+d)^4=c$. Мы видим, что здесь, как и в симметричном уравнении, равны коэффициенты при x , но сумма свободных членов не равна нулю. Почти симметричные уравнения можно свести к симметричным, если ввести новую переменную, равную среднему арифметическому значению скобок. По отношению к этой новой переменной уравнение становится симметричным. Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.

1.3.3. **Возвратным** называется уравнение вида: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$. Мы видим, что значения коэффициентов как бы начинают возвращаться начиная с первой степени x . Если $a=0$, то уравнение принимает вид: $bx^3+cx^2+bx=0$, в котором x сразу

же выносятся за скобки, а в скобках остается квадратный трехчлен. Значит, один корень равен нулю, а два других могут быть получены, если мы приравняем к нулю выражение, стоящее в скобках, т. е. решим квадратное уравнение. Если же $a \neq 0$, то тогда можно показать, что x также не равен нулю. Действительно, если предположить обратное, т. е. $x=0$, то все слагаемые в уравнении, кроме последнего, обратятся в нуль, и мы получим $a=0$, что противоречит условию. Значит, наша посылка о том, что $x=0$ неверна и $x \neq 0$. Этот вывод очень важен для применения процедуры решения возвратного уравнения, смысл которой заключается в том, что после ряда преобразований мы вводим новую переменную и сводим исходное уравнение к квадратному, решаем его, находим эту переменную и затем находим все значения x . Процедура состоит из ряда последовательных шагов:

1) делим левую и правую части уравнения на x^2 , группируем величины с равными коэффициентами и выносим эти коэффициенты за скобки. Заметим, что мы имеем право проводить деление на x^2 , так как мы доказали, что $x \neq 0$. В результате получим:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0;$$

2) введем новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$. Выше было сказано, что когда вводится новая переменная, необходимо сразу же давать область ее значений. В данном случае эта область будет определяться условием: $|y| \geq 2$, которое мы пока примем на веру, но в теме «Алгебраические неравенства» (разд. 2) докажем. Новая переменная равна коэффициенту при b . Наша задача теперь выразить через y коэффициент a . Для этого соотношение $y = x + \frac{1}{x}$

почленно возведем в квадрат, получим $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. А уравнение примет вид: $a(y^2 - 2) + by + c = 0$;

3) решаем полученное квадратное уравнение и возвращаемся на второй шаг к искомой переменной x .

Рассмотрим примеры применения предложенных методов.

Пример 1. Решить уравнение: $5x^4 + 7x^2 - 12 = 0$.

Введем новую переменную $y = x^2$, тогда с этой переменной уравнение будет иметь вид: $5y^2 + 7y - 12 = 0$. Решая это квадратное уравнение, получаем корни: $y_1 = -\frac{12}{5}$, $y_2 = 1$. Меньший корень

отрицателен, поэтому он не может равняться неотрицательной величине x^2 и нас не устраивает. А больший корень дает окончательный результат $x \pm 1$.

Пример 2. Решить уравнение: $(2x-1)^4 + (2x+1)^4 = 82$.

Раскроем скобки, приведем подобные члены и сократим на 16:
 $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$. Решая это уравнение, получаем ответ $x = \pm 1$.

Пример 3. Решить уравнение: $(x+7)^4 + (x+3)^4 = 32$.

Так как это уравнение является почти симметричным, то введем новую переменную, равную среднему арифметическому значению скобок: $y = \frac{1}{2}(x+7+x+3) = x+5$. Отсюда $x = y-5$, а уравнение примет вид: $(y+2)^4 + (y-2)^4 = 32$, которое решается аналогично уравнению из примера 2. Получаем ответ $y = 0$, откуда $x = -5$.

Пример 4. Решить уравнение: $3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 3 = 0$.

Введем новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$, тогда после деления искомого уравнения на x^2 , группировки и замены переменной получим квадратное уравнение: $3y^2 - 5y - 2 = 0$, которое имеет два корня: $y_1 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = 2$. Первый корень по модулю меньше 2, поэтому его мы отбрасываем. Читатель может легко убедиться в том, что если бы он не знал этого условия и подставил первый корень вместо дополнительной переменной, то он получил бы квадратное уравнение, которое не имело бы действительных решений, но только в том случае, если бы избежал арифметических ошибок, которые на экзаменах очень вероятны. Чтобы не подвергать себя такой опасности, лучше сразу отбросить ненужный корень. Подставляя второй корень вместо дополнительной переменной, получаем уравнение $x + \frac{1}{x} = 2$, которое после умножения на x становится квадратным, решая его, получаем $x = 1$.

Задания для самостоятельной работы к разделу 1.3

Решить уравнения:

1. $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;
2. $4x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 12x + 4 = 0$;
3. $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$;
4. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$;
5. $(2x+1)^4 + (2x-7)^4 = 706$;
6. $(x-1)^4 + (x+3)^4 = 626$;
7. $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1)$;
8. $(2x-a)^5 - (2x+a)^5 = 242a$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Этот раздел имеет не менее, а может быть, и более важное значение, чем предыдущий. Связано это, во-первых, с тем, что на неравенствах основаны свойства всех элементарных функций, а, во-вторых, к алгебраическим сводятся все остальные типы неравенств. В силу важности этой темы очень кратко остановимся на ее теоретических основах.

2.1. Краткая теория неравенств

2.1.1. Основные свойства неравенств:

- 1) если $a > b$, то $b < a$;
- 2) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;
- 3) если $a > b$, то $a + c > b + c$;
- 4) если $a > b$, то $-a < -b$;
- 5) если $a > b$, то $ac > bc$, если $c > 0$ и $ac < bc$, если $c < 0$.

2.1.2. Действия с неравенствами. С неравенствами можно производить четыре действия:

- 1) неравенства одинакового смысла можно почленно складывать;
- 2) неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, сохраняя знак того неравенства, из которого производится вычитание;
- 3) неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать;
- 4) обе части неравенства с положительными членами можно возводить в одну и ту же степень.

2.1.3. Неравенства, содержащие переменную:

- а) решить неравенство, это значит найти все значения содержащейся в ней переменной величины, для которых неравенство является верным;
- б) два неравенства, содержащие одну и ту же переменную, называются равносильными, если множества их решений совпадают;
- в) решение неравенств основано на их свойствах.

2.1.4. Некоторые подходы к доказательству и решению неравенств.

2.1.4.1. *Линейные неравенства.* Анализ линейного неравенства аналогичен анализу линейного уравнения.

Пусть мы имеем неравенство $ax + b > 0$. Тогда, если $a = 0$ и $b > 0$ — решением неравенства является любое действительное число; если $a = 0$ и $b < 0$, неравенство не имеет решений; если $a > 0$, решением неравенства является значение $x > -\frac{b}{a}$; если $a < 0$, реше-

нием неравенства является значение $x < -\frac{b}{a}$.

2.1.4.2. *Квадратные неравенства.* Их анализ целиком основан на свойствах квадратного трехчлена.

2.1.4.3. *Рациональные неравенства* общего вида выше второй степени решаются и доказываются разложением соответствующих многочленов на множители не выше второй степени.

2.1.4.4. *Дробно-рациональные неравенства* следует решать методом интервалов после переноса всех дробей в одну часть неравенства и приведения к общему знаменателю.

2.2. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

Это неравенство выделяется в силу его высокой эффективности при решении многих задач различных разделов элементарной математики. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — неотрицательные числа, то неравенство будет следующим:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (5)$$

При этом равенство в неравенстве (5) достигается тогда и только тогда, когда все значения a равны между собой. В противном случае неравенство будет строгое. Из этого неравенства вытекают три важных следствия.

2.2.1. **Следствие 1.** Если сумма неотрицательных чисел постоянна, то их произведение достигает максимума, когда все эти числа равны между собой. Действительно, если $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$ — постоянная величина, то из неравенства (5) следует:

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{A}{n}\right)^n.$$

Таким образом, мы имеем неравенство, в котором правая часть постоянна, а левая равна произведению неотрицательных чисел. Значит, своего максимального значения правая часть может достичь лишь тогда, когда неравенство обратится в равенство. Возможно ли это? Да, возможно, ведь вследствие равносильности сделанных преобразований равенство в последнем неравенстве достигается одновременно с равенством в неравенстве (5). А мы уже сказали о том, что равенство возможно лишь при равенстве всех значений a . Следствие 1 доказано.

2.2.2. **Следствие 2.** Если произведение неотрицательных чисел постоянно, то их сумма достигает минимума, когда все эти числа равны между собой. Предлагаем читателю самостоятельно доказать это следствие по аналогии с предыдущим.

2.2.3. **Следствие 3.** Сумма двух положительных взаимно обратных чисел строго больше двух. Это следствие легко доказать, если в неравенстве (5) взять $n=2$ и $a_2 = \frac{1}{a_1}$.

Комментарий. Если в неравенстве или в задаче, которая сводится к неравенству, явно или неявно говорится о неотрицательности входящих в нее величин, то следует попробовать применить неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом или следствия из него. Это связано с тем, что это одно из немногих неравенств, где обязательна неотрицательность входящих в него величин.

Пример 1. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Умножим обе части неравенства на 2 и перенесем все выражения в левую часть, тогда получим неравенство, в левой части которого будут стоять три квадрата разности: $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$. Это неравенство очевидно, так как каждый квадрат неотрицателен, а сумма неотрицательных чисел также неотрицательна. Отметим, что равенство имеет место тогда, когда $a=b=c$.

Пример 2. Доказать, что если $a+b \geq 1$, то $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

В соответствии с п. 4 подразд. 2.1.2 возведем обе части исходного неравенства в квадрат, получим: $a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$. Сложим это неравенство с очевидным неравенством $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.

В результате после сокращения на два будем иметь $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

Прделаем с этим неравенством ту же процедуру, что и с исходным. Сначала почленно возведем в квадрат, получим

$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4}$ и сложим это неравенство с очевидным неравен-

ством $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$. Получим $2a^4 + 2b^4 \geq \frac{1}{4}$, а после сокращения на два — искомый результат.

Пример 3. Доказать, что $x^{12} - x^9 + x^6 - x^3 + 1 > 0$.

Обратим внимание на то, что перед всеми четными степенями величины x стоит знак плюс. Это означает, что каким бы ни был x , сумма четных степеней (включая нулевую степень) положительна, а при всех степенях x с точностью до знака стоит 1. На этом основано доказательство, которое состоит из ряда последовательных шагов:

пусть $x < 0$, тогда неравенство очевидно, так как значения всех нечетных степеней x отрицательны, но перед ними стоит знак минус, который даст положительное значение;

пусть $x=0$, тогда неравенство станет очевидным: $1 > 0$;

пусть $0 < x < 1$, тогда перепишем неравенство в виде $x^{12} + x^6(1-x^3) + (1-x^3) > 0$. Это неравенство выполняется, так как $0 < x < 1$ и чем выше степень, тем значение x меньше единицы. Значит, все скобки положительны и неравенство выполнено;

пусть $x=1$, тогда неравенство станет очевидным: $1 > 0$;

пусть $x > 1$, тогда перепишем неравенство в виде $x^9(x^3-1) + x^3(x^3-1) + 1 > 0$. Это неравенство выполняется, так как при $x > 1$ чем выше степень, тем значение x больше единицы. Значит, все скобки положительны и неравенство выполнено.

Пример 4. Доказать, что если $a, b, c, d > 0$, то $a^{c+d} + b^{c+d} \geq a^c b^d + a^d b^c$.

Перенесем все члены неравенства в левую часть, вынесем за скобки величины a^c и b^c , получим: $a^c(a^d - b^d) + b^c(b^d - a^d) \geq 0$. Теперь вынесем за скобки $a^d - b^d$, получим: $(a^d - b^d)(a^c - b^c) \geq 0$. Теперь следует рассмотреть ряд случаев. Если $a = b$, то обе скобки равны нулю и неравенство выполнено. Если $a > b$, то обе скобки положительны и неравенство выполнено. Если $a < b$, то обе скобки отрицательны, но их произведение положительно. Значит, неравенство полностью доказано.

Пример 5. Доказать, что для натурального n справедливо неравенство: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

Предложим для решения этого примера метод, который можно использовать при решении многих подобных неравенств. Обобщим пример. Надо доказать, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq B$. Будем искать для каждого слагаемого в левой части такую нижнюю границу $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, чтобы выполнялись n неравенств: $a_1 \geq \alpha_1, a_2 \geq \alpha_2, \dots, a_n \geq \alpha_n$. Если мы сложим все эти неравенства, то получим верное неравенство вида: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Теперь достаточно, чтобы сумма всех слагаемых в правой части была больше или равна B . Тогда в силу свойства 2 (см. подразд. 2.1.1) левая часть заданного неравенства будет также больше или равна B . Но мы не ответили на самый главный вопрос, как найти нижние границы — числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$? Самое простое предположить, что мы ищем все числа α , равные между собой и такие, чтобы их сумма равнялась бы B . В этом случае все необходимые условия будут выполнены, а общая нижняя граница будет найдена из равенства $\alpha_n = B$. Значит, $\alpha = \frac{B}{n}$. В нашем примере $B = \frac{1}{2}$ и до-

статочно показать справедливость неравенств $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$,

$\frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}$. Все эти неравенства справедливы, так как

входящие в них дроби положительны, числители их равны, а знаменатели левых частей меньше знаменателей правых. Наше неравенство доказано.

Пример 6. Доказать, что для любых действительных α и β выполняется неравенство: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Доказательство состоит в сложении двух очевидных двойных неравенств, которые выполнены для любых действительных чисел: $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ и $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$. В результате получим: $-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$, откуда сразу же следует искомое неравенство.

Пример 7. Доказать, что из всех прямоугольников с постоянным периметром максимальную площадь имеет квадрат.

Конечно, эту задачу можно решить с помощью производной, обозначая одну из сторон прямоугольника через x и выражая другую через x и данный периметр. Но гораздо быстрее этот пример можно решить, используя следствие 2.2.1. Действительно, пусть a и b — стороны прямоугольника. Тогда его периметр $2a + 2b = \text{const}$, но тогда и $a + b = \text{const}$. А значит, произведение ab , равное площади прямоугольника, достигает максимума, когда $a = b$, т. е. когда прямоугольник является квадратом.

Пример 8. Доказать, что уравнение $x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ не имеет положительных решений.

Для доказательства применим метод, основанный на неравенствах. Докажем, что для всех положительных значений x левая часть неравенства всегда положительна. Для этого перепишем заданное соотношение в следующем виде: $x^2 + 1 + x^3 + x^2 + x = 2x$. Разделим левую и правую части на положительное число x :

$x + \frac{1}{x} + x^2 + x + 1 = 2$. Сумма первых двух слагаемых в левой части

по следствию 2.2.3 больше или равна 2, а следующие три слагаемые представляют собой неполный квадрат суммы, который всегда положителен. Значит, левая часть всегда строго больше 2 или правой части, а следовательно, и левая часть искомого уравнения всегда будет положительна.

Пример 9. Доказать, что для положительных величин a , b и c выполнено неравенство $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.

Так как a , b , c положительны, то для них выполнены неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \text{ и } \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}}. \text{ Для доказательства искомого}$$

неравенства теперь достаточно вначале каждое из двух этих неравенств почленно умножить на 3, а затем перемножить сами неравенства.

Пример 10. Определить размеры контейнера для приборов, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, если известно, что его объем $7,2 \text{ м}^3$, площадь стенок не более 24 м^2 , а периметр основания не менее 10 м .

Пусть a и b — размеры контейнера в основании, а c — его высота. Тогда условие задачи можно свести к следующей системе условий:

$$\begin{cases} abc = 7,2; \\ 2ab + 2ac + 2bc \leq 24; \\ 2a + 2b \geq 10. \end{cases}$$

Проанализируем второе неравенство, предварительно разделив его на два. Тогда, с учетом того, что $ab = \frac{7,2}{c}$, левая часть неравен-

ства примет вид: $\frac{7,2}{c} + c(a+b)$. Произведение $c(a+b) \geq 5c$, так как из последнего неравенства системы следует, что $a+b \geq 5$. В результате будем иметь: $\frac{7,2}{c} + 5c$. Это выражение представляет со-

бой сумму положительных слагаемых, произведение которых постоянно и равно 36. Значит, по условию следствия 2.2.2 полученная сумма достигает минимума при равенстве этих двух слагаемых, откуда сразу получаем, что минимум достигается при $c = 1,2$, а само значение минимума равно 12. Запишем теперь всю

цепочку полученных неравенств: $ab + ac + bc \geq \frac{7,2}{c} + c(a+b) \geq \frac{7,2}{c} + 5c \geq 12$. Последнее неравенство следует из того, что сумма

двух чисел всегда больше своего минимального значения или равна ему. Следовательно, мы показали, что половина левой части искомого второго неравенства системы больше или равна 12, а по условию она меньше или равна 12. Значит, для того чтобы вся цепочка неравенств выполнялась и не противоречила условию, необходимо, чтобы все нестрогие неравенства превратились бы в равенства. В противном случае 12 будет строго больше 12. А равенства означают, что $c = 1,2$, а a и b связаны системой условий:

$$\begin{cases} ab = 6; \\ a + b = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что $a = 2$ или 3 , $b = 3$ или 2 . Значит, ответ задачи следующий: высота контейнера $1,2 \text{ м}$, а размеры сторон основания 3 и 2 м .

Пример 11. Решить неравенство для всех неотрицательных значений параметра a : $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geq 0$.

Решение. При $a=0$ неравенство принимает вид: $-x+3 \geq 0$, откуда сразу следует ответ $x \leq 3$. При $a>0$, группируя первое, второе и четвертое слагаемые, получаем: $a(ax^2+3)^2 - x + 3 \geq 0$. Перепишем это неравенство в виде $a[(ax^2+3)^2 - k^2x^2 + k^2x^2] - x + 3 \geq 0$. Группируя теперь первые две величины, стоящие в квадратных скобках, и раскладывая их по формуле разности квадратов и раскрывая квадратные скобки, получим: $a(ax^2+3x+kx)(ax^2+3-kx) + ak^2x^2 - x + 3 \geq 0$. Напомним, что в соответствии с подразд. 2.1.4.3 следует разложить левую часть неравенства на множители первой или второй степени. Полученное выражение справедливо для любого значения k , так как мы прибавили и вычли одно и то же выражение k^2x^2 . Но для разложения на множители нужно, чтобы выражение, стоящее за скобкой, совпало с одной из скобок, например, с первой. А это возможно только при $k=-1$. Вынося равную величину за скобки, получим: $(ax^2 - x + 3)(a^2x^2 + ax + 3a + 1) \geq 0$.

В общем случае мы должны были бы рассуждать так. Произведение двух скобок неотрицательно в двух случаях: либо, когда одна из скобок равна нулю, либо, когда скобки имеют одинаковый знак — одновременно положительны или одновременно отрицательны. Но в данном случае мы видим, что дискриминант второй скобки равен $-12a^3 - 4a^2$, а коэффициент при x^2 положителен. Поэтому в соответствии со свойствами квадратного трехчлена вторая скобка всегда положительна. Значит, мы имеем право разделить неравенство на вторую скобку, сохраняя знак неравенства. Получим: $ax^2 - x + 3 \geq 0$. Левая часть неравенства представляет собой квадратный трехчлен, дискриминант которого равен: $1 - 12a$. Поэтому при значении $a \geq 1/12$ неравенство справедливо для любого действительного значения x , а при $0 < a < 1/12$ решение будет находиться вне корневого интервала уравнения $ax^2 - x + 3 = 0$. Неравенство полностью решено и окончательный ответ следующий: при $a=0$ $x \leq 3$; при $0 < a < 1/12$

$x \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 12a}}{2a}$ или $x \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 12a}}{2a}$; при $a \geq 1/12$ x — любое действительное число.

Задания для самостоятельной работы к разделу 2

Доказать:

1. Что неравенство $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ выполнено для любых значений a и b ;

2. Если $a + b \geq 1$, то $a^8 + b^8 \geq 1/128$;

3. Для любого натурального n : $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$;

4. Для всех целых k : $11k^2 - 14k + 3 \geq 0$;
5. $|\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|$ для любых действительных значений α и β ;
6. $\frac{x^2}{1+x} \leq \frac{1}{2}$ для любых действительных значений x ;
7. Если $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ и $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, то $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 2^n$;
8. $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$ для любого действительного значения a .
9. Решить неравенство для всех неотрицательных значений параметра a :

$$4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geq 0.$$

3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. Иррациональные уравнения

Вначале дадим базовое определение. **Иррациональным** называется уравнение, в котором неизвестное присутствует под знаком радикала целой степени. В данном разделе мы рассмотрим методы решений иррациональных уравнений радикала второй, третьей и четвертой степени.

При решении иррациональных уравнений необходимо иметь в виду две проблемы. Первая проблема заключается в том, что решение не должно выходить из области действительных чисел. Это означает, что нельзя извлекать корень целой степени из отрицательных выражений. Вторая проблема связана с неоднозначным определением квадратного корня из переменных величин; т. е. при возведении в четную степень могут появиться посторонние корни.

Общий метод решений иррациональных уравнений состоит в сведении к рациональным либо с помощью замены переменных, либо с помощью возведения в степень. При этом необходимо внимательно следить за областью значений переменных: все подрадикальные выражения должны быть неотрицательны, а возведение в четную степень возможно лишь тогда, когда обе части уравнения неотрицательны.

Если внимательно проводить все описанные выше процедуры и следить за равносильностью всех преобразований, то вы никогда не получите лишних корней. Однако чтобы полностью исключить ошибку при решении иррациональных уравнений, всегда следует делать проверку.

3.1.1. Иррациональное уравнение основного вида. Среди всех иррациональных уравнений можно выделить такую модификацию, решение которой сводится к реализации стандартной схемы

и легко запоминается. Назовем его иррациональным уравнением основного вида. Оно имеет следующую запись:

$$\sqrt{f(x)} = g(x). \quad (6)$$

Схема решения этого уравнения заключается в следующем. Так как в левой части стоит корень квадратный, т. е. радикал четной степени, то левая часть всегда неотрицательна. Значит, правая часть также должна быть неотрицательна. Возводя при этом условии обе части уравнения в квадрат, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что в этом случае можно не задавать условие неотрицательности функции $f(x)$, так как она равна квадрату функции $g(x)$, который всегда неотрицателен. Второй момент. Надо ли решать неравенство $g(x) \geq 0$? В общем случае — нет. Ведь наша задача — всего лишь проверить полученные корни уравнения на непротиворечивость этому неравенству. А для этого корни надо просто подставить в это неравенство. Но в некоторых случаях, особенно когда эти неравенства не очень сложны, либо, напротив, очень сложны получаемые уравнения, неравенства все же следует решать, так как может оказаться, что в процессе преобразований пересечение решений всех возникающих неравенств даст конечное или пустое множество значений переменной величины. Если множество будет пустым, то ответ очевиден — решений нет. А если там окажется конечное число точек, то их надо просто подставить в исходное уравнение и выбрать те из них, которые обращают его в тождество.

3.1.2. Симметричные иррациональные уравнения радикала четвертой степени. Среди иррациональных уравнений четвертой степени можно выделить те, которые мы называли симметричными. Они имеют следующий вид:

$$\sqrt[4]{b+ax} + \sqrt[4]{b-ax} = c. \quad (7)$$

Для решения подобных уравнений применяется стандартная процедура, которая позволяет, введя новую переменную, равную произведению радикалов, стоящих в левой части, свести данное уравнение к квадратному (по отношению к новой переменной). Очевидно, что новая переменная должна быть неотрицательна. Поэтому, взяв неотрицательные решения полученного квадратного уравнения и решая уравнение, аналогичное уравнению (6), мы находим и искомую переменную x .

П р и м е р. Решить уравнение $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$.

Так как мы имеем дело с уравнением вида (7), применим стандартную процедуру решения. Введем новую переменную

$z = \sqrt[4]{41^2 - x^2}$. Как же быстрее всего выразить через эту переменную наше уравнение? Возведем обе части уравнения в квадрат

$$\sqrt{41 + x + 2z} + \sqrt{41 - x} = 16,$$

переноса $2z$ в правую часть и еще раз возводя обе части уравнения в квадрат, после упрощений получим следующее квадратное уравнение:

$$z^2 - 32z + 87 = 0,$$

корни которого равны 3 и 29. Оба корня неотрицательны, но второй корень не подходит, так как в процессе преобразований появилось еще одно условие: $z \leq 8$ (самостоятельно поясните почему). Для нахождения искомой переменной x следует решить уравнение

$$\sqrt[4]{41^2 - x^2} = 3,$$

которое аналогично уравнению вида (6). Так как правая часть неотрицательна, то, возведя в четвертую степень обе части уравнения, получаем, что $x = \pm 40$. Проверка показывает, что оба этих корня обращают исходное уравнение в тождество.

3.1.3. Иррациональные уравнения радикала третьей степени. Вообще говоря, не существует общего метода решения каких-либо типов уравнений этого класса, однако, довольно часто бывает удобным применение одного простого тождества, вытекающего из известной формулы куба суммы или разности. Действительно; если известно, что $a + b = c$, то возводя это равенство почленно в куб, группируя в левой части второе и третье слагаемые, вынося за скобки 3 и заменяя полученную в скобках сумму $a + b$ на равное им c , имеем:

$$a^3 \pm b^3 \pm 3abc = c^3. \quad (8)$$

Легко заметить, что если сумму заменить на разность, то знаки «+» в соотношении (8) поменяются на «-». Посмотрим, как «работает» тождество (8).

Пр и м е р. Решить уравнение $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$.

В данном случае сразу возводим уравнение в куб и, применяя соотношение (8), имеем:

$$5x+7 - (5x-12) - 3\sqrt[3]{5x+7}\sqrt[3]{5x-12} \cdot 1 = 1.$$

Произведя упрощения, переноса радикал в правую часть и сократив левую и правую части на 3, получим: $\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)} = 6$. Возводя это уравнение в куб, переноса все в левую часть и сократив на 25, имеем: $x^2 - x - 12 = 0$, корни которого и являются корнями исходного уравнения, в чем можно убедиться, сделав проверку.

Таким образом, для некоторых типов иррациональных уравнений радикалов второй, третьей и четвертой степени возможно предложить достаточно простые стандартные процедуры их решения. Эти процедуры довольно легко осваиваются и помогают быстро решать уравнения данных типов. Напомним, что в общем случае следует сначала задать область значений переменных величин, входящих в уравнение, а если в процессе решения будет необходимость возводить обе части уравнения в четную степень, то следить за неотрицательностью возводимых выражений.

3.2. Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств необходимо принимать во внимание все свойства неравенств (см. разд. 2.1.1) и следить за корректностью проведения всех действий с неравенствами (см. разд. 2.1.2). Отметим только, что в иррациональных неравенствах следует всегда задавать неотрицательную область значений подрадикальных выражений, так как в отличие от иррациональных уравнений решением этих неравенств является совокупность интервалов, а не конкретные числа. Поэтому окончательное решение получается как пересечение тех интервалов, на которых должна лежать искомая переменная исходя из начальной и промежуточных областей значений и собственно решения неравенства. В некоторых случаях решение сразу же вытекает из анализа области значений. Для пояснения этого рассмотрим неравенство, аналогичное иррациональному уравнению вида (6):

$$\sqrt{f(x)} > g(x). \quad (9)$$

И здесь, в отличие от иррационального уравнения основного типа следует рассматривать случай, когда функция $g(x) < 0$. Тогда, если подрадикальная функция $f(x) \geq 0$, то неравенство становится очевидным: неотрицательное число всегда больше отрицательного. И значит, ответом в данном случае является пересечение решений двух неравенств $f(x) \geq 0$ и $g(x) < 0$. В том случае, когда правая часть неравенства (9) неотрицательна и определена подрадикальная функция, ответом является пересечение трех условий: $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, $f(x) > g^2(x)$.

Предлагаем читателям по аналогии рассмотреть случай, когда в неравенстве (9) вместо знака «больше» стоит знак «меньше».

Перейдем к решению примеров по всему разделу «Иррациональные уравнения и неравенства» с учетом всех моментов. Но прежде, чтобы проверить себя на полное понимание прочитанного материала, попытайтесь самостоятельно ответить на следующий вопрос: почему мы говорим, что $\sqrt{9} = 3$, а решая уравнение $x^2 = 9$, пишем, что $x = \pm 3$? Нет ли здесь скрытого противоречия? Конечно же, нет. Просто, если вы механически запомните, как решается уравнение $x^2 = 9$, в вас может закрасться сомнение. Но

если вы понимаете, что на пути к ответу лежит цепочка преобразований, то вы понимаете суть вопроса. Эта цепочка следующая. Сначала извлекаем корень квадратный из левой и правой частей. Корень квадратный из девяти равен трем. А вот корень квадратный из x^2 равен $|x|$! И теперь, раскрывая модуль для отрицательных и неотрицательных значений x ; мы получаем совокупность условий: $x=3$ или $-x=3$. Но второй ответ можно умножить на -1 , тогда $x=-3$. Объединяя теперь оба ответа, получаем $x=\pm 3$. Значит, знак минус пришел в ответ не от 9, а от переменной величины x !

Примеры к разделу 3.1

Пример 1. Известно, что разность $\sqrt{|12\sqrt{5}-29|} - \sqrt{12\sqrt{5}+29}$ является целым числом. Найти это число.

Начнем решение с раскрытия модуля, стоящего под первым радикалом. Под модулем стоит разность $12\sqrt{5}-29$. Нам необходимо оценить знак этой разности, т. е. сравнить между собой два положительных числа $12\sqrt{5}$ и 29, одно из которых иррационально. В общем случае это следует делать, возводя обе части в степень, соответствующую знаку радикала. Возводя в квадрат оба числа, получаем 720 и 841. Второе число больше. Поэтому разность отрицательна. Это означает, что мы должны раскрыть модуль с переменной знака. Обозначим искомое число через M , будем иметь: $M = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}$. Обратим внимание на то, что первая подрадикальная функция меньше второй, поэтому $M < 0$. Значит, умножая обе части нашего соотношения на -1 , мы получим соотношения с положительными частями. Возведем его в квадрат и с учетом того, что произведение подрадикальных выражений представляет собой разность квадратов, т. е. $841 - 720$. Имеем: $M^2 = 29 - 12\sqrt{5} - 2\sqrt{121 + 29 + 12\sqrt{5}} = 36$. Значит, $M = \pm 6$. С учетом того, что M должно быть отрицательным числом, получаем ответ: $M = -6$.

Пример 2. Решить уравнение: $\sqrt{1+4x-x^2}+1=x$.

Сведем это уравнение к иррациональному уравнению основного вида $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$. По схеме решения уравнений (6) правая часть должна быть неотрицательна, поэтому имеем следующую систему условий:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0; \\ 1+4x-x^2 = x^2-2x+1. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, получаем: $x_1=0$, $x_2=+3$. Корень x_1 не удовлетворяет первому уравнению системы. Ответ: $x=3$.

Пример 3. Решить уравнение: $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x}-\sqrt{x+8}$. Данное уравнение является уравнением вида (6), имеем систему условий:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}-1 \geq 0; \\ x-\sqrt{x+8}=x+1-2\sqrt{x+1}+1. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы к виду $\sqrt{x+8}=2(\sqrt{x+1}-1)$. Обратим внимание на то, что выражение, стоящее в скобках в правой части, совпадает с первым неравенством системы, а само уравнение является уравнением вида (6). Поэтому сразу возводим его в квадрат, получаем: $x+8=4x+4-8\sqrt{x+1}+4$, или после преобразований: $8\sqrt{x+1}=3x$, опять сводящееся к системе:

$$\begin{cases} 3x \geq 0; \\ 64x+64=9x^2. \end{cases}$$

Решая второе уравнение этой системы, получаем: $x_1 = -\frac{8}{9}$, $x_2 = 8$.

Корень x_1 не удовлетворяет первому неравенству последней системы, а корень x_2 удовлетворяет всем неравенствам. Сделаем проверку, подставив значение $x=8$ в исходное уравнение. Убеждаемся, что оно обращается в тождество. Ответ: $x=8$.

Пример 4. Решить уравнение: $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$.

Это уравнение не является иррациональным уравнением основного вида, поэтому мы должны задать неотрицательную область значений всех подрадикальных выражений: $x \geq 0$, $x+1 \geq 0$, $x+4 \geq 0$, $x+9 \geq 0$. Эти неравенства выполняются при значении $x \geq 0$. Переносим второй и третий радикалы в правую часть, получим: $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}$. Теперь обе части уравнения неотрицательны, и можно возвести обе части в квадрат: $x+2\sqrt{x^2+9x}+x+9=x+1+2\sqrt{x^2+5x+4}+4$. После приведения подобных членов и сокращения на 2 получим: $\sqrt{x^2+5x+4}=2+\sqrt{x^2+9x}$. Это уравнение вида (6), причем правая часть его всегда неотрицательна, если радикал определен. При значении $x \geq 0$ радикал определен, поэтому возводим уравнение в квадрат: $x^2+5x+4=x^2+9x+4+4\sqrt{x^2+9x}+4$. Или после приведения подобных членов и сокращения на 4: $\sqrt{x^2+9x}=-x$. Это уравнение также является уравнением вида (6) и необходимым условием его является неравенство $-x \geq 0$ или $x \leq 0$. Но ранее мы имели неравенство $x \geq 0$. С учетом этих трех условий получаем общую точку $x=0$. Это означает, что область значений состоит из одной точки $x=0$. Является эта точка решением или нет, можно убедиться, подставив ее значение в исходное уравнение. Оно обращается в тождество. Ответ: $x=0$.

Пример 5. Решить уравнение: $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$.

Мы видим, что это уравнение также вида (6), но прежде чем возводить его в квадрат, обратим внимание на то, что его левая и правая части могут быть выражены через две функции: $x-1$ и $x-3$. Эти функции входят в уравнение в разных степенях. Обычно при введении новых переменных за основу берётся наименьшая степень. Обозначим через $m = \sqrt{x-1}$, $n = x-3$. Вводя новые переменные, следует определить области их значений. В данном случае $m \geq 0$. Далее, мы должны учесть, что вводя две величины в одно уравнение, невозможно численно определить эти переменные. Но введение новых переменных все равно оправдано, так как упрощаются промежуточные преобразования и становится возможным получить более простую связь между переменными. С новыми обозначениями уравнение примет вид $m+n = \sqrt{2n^2 + 2m^2}$. Это уравнение вида (6), поэтому достаточно предположить, что $m+n \geq 0$ и возвести его в квадрат. После упрощений получим, что $m=n$. Возвращаясь к искомой переменной, получаем уравнение: $\sqrt{x-1} = x-3$, которое также имеет вид (6) при условии возведения в квадрат $x-3 \geq 0$. После возведения в квадрат мы получим квадратное уравнение, корни которого равны 5 и 2, но второй корень лишний (докажите; почему?). Сделав проверку первого корня на тождественность исходному уравнению, получим ответ: $x=5$.

Пример 6. Решить уравнение: $(9-x^2)\sqrt{2-x} = 0$.

При решении подобных простых уравнений абитуриенты руководствуются следующей некорректной посылкой: «Если произведение равно нулю, то нулю должен равняться любой из сомножителей». Некорректность заключается в том, что может возникнуть такая ситуация, когда значения x , при которых один из сомножителей приравнивается к нулю, не входят в область значений другого сомножителя. Правильной является следующая посылка: «Произведение равно нулю, когда нулю равен любой из сомножителей, а все остальные при этом не теряют смысла». С учетом изложенного ответом примера будут корни: $x=-3$ и $x=2$.

Пример 7. Решить неравенство: $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \geq 0$.

Обратим внимание на то, что это неравенство напоминает уравнение из примера 6. И здесь можно допустить такую же ошибку, связанную с некорректной посылкой о том, что: «...произведение неотрицательно тогда, когда неотрицательны или неположительны его сомножители». При этом на экзаменах допускается следующая типичная ошибка. Рассуждают так. Во-первых, подрадикальная функция должна быть неотрицательна (это бесспорно), значит, решая неравенство $-x^2+x+6 \geq 0$,

получаем: $-2 \leq x \leq 3$. Во-вторых, если второй сомножитель определен, а радикал как функция всегда неотрицателен, то и первый сомножитель должен быть неотрицателен, т. е. $x \geq 1$. Пересекая полученные значения, имеем: $1 \leq x \leq 3$. Казалось бы, все верно. Но давайте внимательнее присмотримся ко второму шагу. Переход от исходного неравенства к неравенству $x \geq 1$ фактически означает, что мы разделили исходное неравенство на радикал, не изменив знака неравенства. Но в соответствии с правилами можно делить неравенства, не изменяя его знака, только на положительное число, в то время как радикал может принять нулевое значение. Обратим внимание на то, что в этом случае независимо от знака первого сомножителя все произведение обратится в нуль! Как же быть в подобных случаях? Удобно поступать следующим образом. Если мы имеем дело с неравенством, в котором есть неотрицательные (или неположительные) сомножители (многочлены четной степени, радикалы, модули и т. д.), то вначале следует рассматривать все случаи обращения в нуль этих сомножителей, так как при всех других значениях они будут либо строго положительными, либо строго отрицательными. При этом можно смело делить неравенство на такие сомножители, не изменяя или изменяя знак неравенства (в зависимости от знака делителя). Аналогично можно поступить и в данном случае. Опираясь на первый шаг мы видим, что подрадикальная функция обращается в нуль при значениях $x = -2$ и $x = 3$. Оба этих значения обращают всю левую часть неравенства в нуль и, следовательно, являются ответом. Далее мы можем считать, что значение x находится на интервале от -2 до 3 , а раз крайние значения исключены, то подрадикальная функция, а следовательно, и весь радикал строго положительны. Это дает нам право разделить все неравенство на строго положительный радикал, не меняя знака неравенства, и получить значение $x \geq 1$. Пересекая это с областью значений и добавляя точки -2 и 3 , получаем окончательный ответ: $x = -2$ и $1 \leq x \leq 3$.

Пример 8. Решить неравенство: $\sqrt{-x^2 - 4x} + x + 1 > 0$.
 Областью значений данного неравенства будет отрезок от -4 до 0 . Далее, перенося все, что не стоит под радикалом в правую часть, имеем: $\sqrt{-4x - x^2} > -x - 1$. В квадрат сразу возводить нельзя. Это можно делать лишь в том случае, когда правая часть неотрицательна. Но одной из самых распространенных ошибок является игнорирование отрицательного значения левой части неравенства. Действительно, в квадрат в этом случае возводить нельзя, но ведь если левая часть неравенства отрицательна, а правая — неотрицательна, неравенство очевидно! Выражение $-x - 1 \leq 0$ при $x \geq -1$. Пересекая область решений этого неравенства с областью неотрицательных значений подрадикальной функции, получим: $-1 \leq x \leq 0$. Все значения этого отрезка входят в ответ. И далее при $-4 \leq x < -1$ возводим обе части неравенства

в квадрат. После упрощений решаем квадратное неравенство и пересекаем его решение с нашей предпосылкой. Объединяя это с полученным ранее результатом, имеем окончательный ответ:

$$\frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \leq x \leq 0.$$

Пример 9. Решить неравенство: $-x - y^2 - \sqrt{x - y^2 - 1} \geq -1$.

Попытка решить и этот экзаменационный пример «в лоб» вряд ли приведет к чему-либо хорошему. К тому же абитуриенту чисто психологически будет сложно быстро выбрать стратегию решения. Но давайте спокойно применим самые общие принципы решения неравенств. Что мы должны сделать в первую очередь? Определить область значений, т. е. задать неравенство: $x - y^2 - 1 \geq 0$, из которого следует $x \geq y^2 + 1$. Правая часть этого неравенства $y^2 + 1 \geq 1$. Значит, в силу свойства транзитивности неравенств $x \geq 1$. Второе, что мы делаем, это переносим радикал в правую часть. Теперь имеем: $-x - y^2 + 1 \geq \sqrt{x - y^2 - 1}$. Левая часть этого неравенства либо больше, либо равна радикалу, а радикал в свою очередь неотрицателен. Следовательно, еще раз применяя свойство транзитивности, получаем, что и левая часть также должна быть неотрицательна: $-x - y^2 + 1 \geq 0$ или $x \leq 1 - y^2$. И опять по транзитивности получим: $x \leq 1$. Пересечение этого условия с аналогичным условием первого шага означает, что $x = 1$. Подставляя это значение в любое из промежуточных неравенств, получим: $y^2 \leq 0$, что справедливо лишь при значении $y = 0$. Обратим внимание на то, что мы получили еще не решение примера, а только область его значений. Но эта область состоит из одной двухмерной точки, которая не обязательно будет решением данного примера. Но каких-либо других решений не может быть в принципе. Поэтому нам осталось только проверить, является ли эта единственная двухмерная точка из области значений решением. Подставляя ее значение в исходное неравенство, убеждаемся в том, что оно превращается в верное равенство. Поэтому ответом искомого неравенства являются значения $x = 1$, $y = 0$.

Задания для самостоятельной работы к разделу 3

1. Разность $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ является целым числом. Найти это число.

Решить уравнения:

2. $4\sqrt{x+6} = x+1$;

3. $\sqrt{x^2 - 5} + x^2 - 7 = \sqrt{2(x^2 - 7)^2 + 2x^2 - 10}$;

4. $(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0$;

5. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$;
6. $13x - 3x^2 - \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{|4-x|}{\sqrt{x-1}} + |4-x| = 3x|4-x| - \frac{4}{\sqrt{x-1}} + 4$;
7. $\sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x+1|$;
8. $|x + \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$;
9. $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$;
10. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.
11. Решить уравнение $\sqrt{2|x| - x^2} = a$ для всех значений параметра a .

Решить неравенства:

12. $(x+1)\sqrt{-x^2+x+6} \leq 0$;
13. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$;
14. $\sqrt{9-\frac{9}{x}} < x - \sqrt{x-\frac{9}{x}}$;
15. $4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)}$;
16. $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$;
17. $\sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-3} + \sqrt{(x+5)(-x-3)}$;
18. $\frac{\sqrt{2-x} + 4x-3}{x} \geq 2$.

19. Найти все значения параметра a , при которых ровно одно решение неравенства $\sqrt{a^3 - 2a^2 - 4a + 8} x^3 - \sqrt{a^3 - 2a^2} x^2 + \sqrt{a^4 - 4a^2 x - a^2} \leq 0$ удовлетворяет условию $2a \leq x \leq a\sqrt{13}$.

4. ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Трудно сказать почему, но эта тема вызывает определенные трудности как при сдаче письменного, так и устного экзаменов по математике. Для решения задач необходимо и достаточно лишь учитывать свойства логарифмической и показательной функций, а также владеть методами решений алгебраических рациональных и иррациональных уравнений, которые мы с вами уже изучили. Для понимания свойств функции, рассматриваемых в разделе, дадим подробные определения.

Показательным называется выражение:

1) рациональное относительно неизвестного: $f(x)^{g(x)}$ при $g(x) \neq 1$;

2) если $f(x)$, $g(x)$ — показательные выражения, то $f(x)^{g(x)}$ также показательное выражение;

3) рациональное выражение от показательных выражений.

Например выражение вида: $\frac{3^x + x^5}{x^{5x} - 8x}$.

Обобщая эти строгие определения, можно сказать, что показательным называется выражение, в котором неизвестное может находиться и в показателе степени. Простейший вид показательной функции $a^x = b$. При этом для однозначного соответствия левой и правой частей мы должны определить только положительные значения a . Иначе, например, при $x = 2$ $b = 4$ как при $a = 2$, так и при $a = -2$. Понятно, что $b > 0$. Но b не может также равняться 1. Почему? Да потому, что при $x = 0$ любое положительное значение a даст нам в результате 1. А это опять дает неоднозначность. Если же мы захотим при заданных ограничениях на a и b выразить через них x , то мы получим функцию, обратную показательной, которая называется логарифмической. Дадим формально строгое определение этой функции.

Логарифмическим называется выражение:

1) рациональное от неизвестного;

2) если $f(x)$, $g(x)$ — логарифмические выражения, то $\log_{g(x)} f(x)$ является также логарифмическим выражением;

3) рациональное выражение от логарифмического выражения также является логарифмическим выражением.

Как мы уже показали выше, показательные и логарифмические функции взаимнообратны. Поэтому графики этих функций симметричны по отношению к биссектрисе первого и третьего координатных углов в декартовой системе координат. Для более четкого понимания приводимых ниже свойств показательной и логарифмических функций полезно наряду с аналитической рассмотреть и графическую интерпретацию этих свойств. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно, используя любой доступный вам справочник по математике.

Свойства показательной функции: $y = a^x$:

1) область определения: множество действительных чисел;

2) область значений: множество всех положительных чисел;

3) функция монотонно возрастает, если $a > 1$, и монотонно убывает, если $0 < a < 1$;

4) при $x = 0$ $y = 1$;

5) если $0 < a < 1$, то при $x < 0$ $a^x > 1$, а при $x > 0$ $0 < a^x < 1$; если $a > 1$, то при $x < 0$ $0 < a^x < 1$, а при $x > 0$ $a^x > 1$.

Предлагаем читателю в качестве полезного упражнения самостоятельно выписать по аналогии все свойства логарифмической функции, опираясь на связь показательного и логарифмических выражений.

Для решения уравнений из этого раздела следует также пользоваться формулами для преобразования показательных и логарифмических выражений. Так как не всегда некоторые из этих формул приводятся корректно, остановимся на анализе этих формул и прокомментируем те из них, которые могут при их неверной интерпретации приводить к ошибкам.

Формулы преобразования степени:

- 1) $a^x a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{xy}$; 4) $(ab)^x = a^x b^x$;
5) $(a:b)^x = a^x : b^x$.

Прежде чем перейти к рассмотрению симметричных логарифмических формул, вспомним определение логарифма: логарифмом числа a по основанию b является такое число c , что $b^c = a$. Таким образом, логарифм — это степень, в которую надо возвести основание, чтобы получить логарифмируемую величину. В силу сделанных ранее допущений и связи логарифмической и показательной функций мы должны определить a и b только на множестве положительных чисел. Кроме того, $b \neq 1$. Запишем это в виде формулы

$$\log_b a = c, \text{ при этом } b^c = a. \quad (9)$$

Теперь, если вместо c мы подставим тождественно равное ему выражение, то получим основное логарифмическое тождество

$$b^{\log_b a} = a. \quad (10)$$

Формулы преобразования логарифмических выражений:

- 1) $\log_a 1 = 0$; 2) $\log_a a = 1$; 3) $\log_b a^m = m \log_b |a|$;
4) $\log_c ab = \log_c |a| + \log_c |b|$; 5) $\log_c (a/b) = \log_c |a| - \log_c |b|$;
6) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$; подставляя вместо c a , получим
7) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$; 8) $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_{|b|} a$.

Полезным также может быть использование следующего тождества:

$$M \equiv \log_a a^M. \quad (11)$$

Выше мы говорили о том, что некоторые логарифмические формулы иногда применяются некорректно. Это относится

к формулам 3)—5), 8). А точнее, к модулю, стоящему в правой части. Порой его опускают, а это неверно. Действительно, в формуле 3) мы не просто механически выносим степень при a как коэффициент перед логарифмом, а извлекаем из логарифмического выражения корень соответствующей степени. При этом, если значение степени четно, то само a может быть как строго положительным, так и отрицательным, в то время как левая часть уравнения определена только для положительного значения a . Введение в правую часть модуля снимает это несоответствие. Кроме того, как мы знаем, извлекая корень четной степени, мы получаем модуль основания степени. По этой же причине модуль стоит в правой части формулы 8). В правой части формул 4) и 5) также должен стоять модуль. Действительно, левая часть этих формул положительна, когда значения a и b либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны. В то время как правая часть определена только для положительных значений этих величин. Сделаем еще одно важное замечание. Если левые и правые части во всех перечисленных формулах поменять местами, то модуль ставить не нужно. Ведь исходные данные будут определять и результат. Например, так как в формулу 4) входит сумма логарифмов, мы должны предположить, что логарифмируются положительные значения. Но произведение положительных чисел также положительно. Аналогичные объяснения можно привести и для других формул. Рассмотрев и прокомментировав основные формулы, перейдем теперь к рассмотрению примеров, которые предлагались на письменном экзамене.

Пример 1. Решить уравнение $4^{2x} + 16^x + 4^x - 10 = 0$.

Напоминаем, что решение любого уравнения следует начинать с определения области возможных значений переменных. В данном уравнении x может быть любым действительным числом. Метод решения здесь предопределяется тем, что основания всех показательных выражений могут быть сведены к одному и тому же числу 4:

$$4^{2x} + 4^{2x} + 4^x - 10 = 0.$$

Теперь мы можем ввести новую переменную $z = 4^x$. Областью допустимых значений новой переменной z является только множество положительных чисел. С новой переменной исходное уравнение примет вид

$$z^2 + z^2 + z - 10 = 0,$$

или, приведя подобные члены:

$$2z^2 + z - 10 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения равны: $z_1 = -\frac{5}{2}$; $z_2 = 2$. Первый корень не входит в область допустимых значений, поэтому

мы его отбрасываем. С учетом второго корня исходное уравнение принимает вид $4^x = 2$. В данном случае и левая, и правая части могут быть выражены через одно и то же основание степени 2. Но так бывает далеко не всегда. В общем случае последнее показательное уравнение следует решать, логарифмируя левую и правую части по тому основанию, которое является основанием показательной функции левой части. В данном случае надо логарифмировать по основанию 4: $\log_4 4^x = \log_4 2$ и далее применяя формулы 3), 8) преобразования логарифмов, получим $x = 1/2$. Подставив это значение в уравнение, убеждаемся, что оно верно.

Пример 2. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$.

Данное показательное уравнение определено для всех значений переменной, но мы не можем применить здесь метод предыдущего примера, так как основания степеней нельзя свести к одному и тому же числу. Как быть в этом случае? Для подобных уравнений может быть предложен следующий метод, состоящий из двух стандартных шагов. На первом шаге мы должны добиться, чтобы в показателях степеней стояли одинаковые функции. На втором шаге надо разделить обе части уравнения на среднее значение основания в этой степени. Дальнейшие действия всегда очевидны. Реализуем этот метод. Во-первых, выражение, стоящее в правой части, преобразуем следующим образом: $2^{2x+1} = 2^1 2^{2x} = 2 \cdot 4^x$. Исходное уравнение примет следующий вид: $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$. Из трех значений оснований: 9, 6 и 4 средним по величине является 6. Поэтому второй шаг заключается в делении уравнения на 6^x , получим $\left(\frac{9}{6}\right)^x + 1 = 2\left(\frac{4}{6}\right)^x$.

Введем новую переменную $z = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$. В результате после преобразований получим квадратное уравнение, корни которого равны: $z_1 = -2$; $z_2 = 1$. Первый корень посторонний. Взяв значение $z = 1$, получим $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$, или логарифмируя обе части по основанию $\frac{3}{2}$ получим, что $x = 0$. Проверка показывает, что это значение

обращает исходное уравнение в тождество и, значит, является решением. В дальнейших примерах мы не будем специально это оговаривать, но в завершении решения всегда следует делать проверку, так как, во-первых, мы решаем не исходное уравнение, а какие-либо его модификации, во-вторых, проверка позволит избежать появления посторонних значений для корней, которые мы можем не учесть при определении области допустимых значений, в-третьих, проверка позволяет избежать обычных арифметических ошибок.

Пример 3. $\lg(x-2) + \lg(x+2) = \lg(4x+1)$.

Все логарифмируемые функции должны быть положительны. Пересечение трех неравенств дает нам множество допустимых значений: $x > 2$. Сумма логарифмов в левой части в соответствии с формулой 4) равна логарифму произведения: $\lg(x^2-4) = \lg(4x+1)$. Мы определили логарифмическую функцию таким образом, чтобы, как и для всех элементарных функций, имело место взаимно однозначное соответствие между функцией и аргументом. Значит, из равенства логарифмов одного и того же основания следует равенство логарифмируемых выражений. Процедура отбрасывания логарифмов называется потенцированием. Имеем $x^2-4=4x+1$. Корни этого квадратного уравнения равны: $x_1 = -1$; $x_2 = 5$. Первый корень не входит в область допустимых значений, а второй является решением уравнения.

Пример 4. $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 2x$.

В том случае, когда левая и правая части представляют собой логарифм логарифма, необходимо стремиться к тому, чтобы последовательно «снимать», т. е. потенцировать внешние логарифмы. Но для этого необходимо, чтобы логарифмы были по одному и тому же основанию. Если мы хотим, чтобы в основании логарифма в правой части стояло 4, мы в соответствии с формулой 8) должны возвести основание 2 в квадрат. А для этого следует умножить и разделить левую часть уравнения на 2, $1/2$ при этом следует отправить в основание логарифма обратной величиной, т. е. 2, а 2 в соответствии с формулой 3) отправить в степень внутреннего логарифма. Уравнение примет вид $\log_4 \log_2^2 x = \log_4 \log_4 2x$. Проведя потенцирование, применяя в правой части формулу 4) и вводя новую переменную $z = \log_2 x$, определенную на множестве положительных чисел, получим квадратное уравнение: $2z^2 - z - 1 = 0$. Корни этого уравнения: $-1/2$ и 1. Первый корень посторонний, а второй после применения определения логарифма дает ответ: $x = 2$.

Пример 5. $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{\frac{1}{6}} (5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$.

Область допустимых значений связана с неотрицательностью логарифмируемой функции $5x^2 - 2x - 3$. Это условие выполнено при $x < -3/5$ и $x > 1$. Какой же метод можно применить тогда, когда перемножаются различные функции? В данном случае логарифмическая и рациональная. Для таких случаев удобно применять такое разложение на множители, которое позволит разделить функции разных классов по различным сомножителям. Для реализации этого метода перенесем выражение, стоящее в правой части, в левую часть, применим формулы 3) и 8), сгруппируем первые два и последние два слагаемых, вынесем за

скобки $\frac{1}{2}x^2 + x$. Получим $\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \cdot (\log_6(5x^2 - 2x - 3) - 2) = 0$. Приравняв к нулю каждый из сомножителей и делая необходимые действия, получаем следующие значения: $-\frac{13}{5}$; -2 ; 0 ; 3 . Нашей области допустимых значений противоречит только значение 0 . Проверкой убеждаемся, что все остальные значения — корни.

Пример 6. $\left(\frac{x}{54}\right)^{\log_6 x} = \frac{2}{3}$.

В данном уравнении логарифм стоит в степени алгебраической функции. В таких ситуациях иногда полезно на первом шаге логарифмировать левую и правую части уравнения по основанию того логарифма, который стоит в степени алгебраической функции. В данном случае по основанию 6. В области значений $x > 0$ после предварительного возведения в квадрат левой и правой частей логарифмируем обе части уравнения по основанию 6, применяем формулу 5) и получаем после раскрытия скобок квадратное уравнение по отношению к переменной $\log_6 x$. После преобразований найдем корни исходного уравнения: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = 36$.

Пример 7. Решить уравнение для всех значений параметра a :

$$\log_3 x + \log_9 x + 3 \log_a x = 5.$$

Напомним, что в данном случае надо указать и такие значения параметра a , при которых решением уравнения является пустое множество. Поэтому еще до преобразований мы можем сказать, что при $a \leq 0$ и $a = 1$ решений нет. Будем делать дальнейшие преобразования предполагая, что $a > 0$ и $a \neq 1$. Но в основании логарифмов в левой части стоят разные величины: 3, 9 и a . Как быть в этой ситуации? Как правило, к решению ведет сведение всех логарифмов к одному и тому же основанию в соответствии с формулой 6), в данном случае к основанию 3. Применяя к основанию 9 формулу 8) и вынося $3 \log_3 x$ за скобки и приводя выражение, оставшееся в скобках, к общему знаменателю, имеем: $3 \log_3 x \frac{\log_3 a + 2}{2 \log_3 a} = 5$. Теперь для нахождения исходной переменной мы должны были бы разделить левую и правую части уравнения на дробь, стоящую в левой части. Но возможно, что в области значений параметра a существуют такие значения, которые обращают дробь в нуль. При этих значениях параметра решений нет. Приравнявая дробь к нулю, получаем, что $a = 1/9$. Исключая это число из области значений параметра a , делим

левую и правую части уравнения на дробь, стоящую в правой части (теперь мы знаем, что в области значений параметра a она не обратится в нуль), и применяя определение логарифма, получаем окончательный ответ, который в данном случае должен быть записан следующим образом: при $a \leq 0$; $a = 1/9$; $a = 1$ — решений нет, при $a > 0$; $a \neq 1/9$; $a \neq 1$
$$x = 3^{10 \frac{\log_3 a}{6 + 3 \log_3 a}}.$$

Задания для самостоятельной работы к разделу 4

1. Имеют ли общие точки область значений функции $y = \sqrt{3} + 2\sqrt{2x - 2x^2}$ и промежуток $[\log_3 15; 100]$?

Решить уравнения:

2. $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}.$

3. $\log_2(2^x - 7) = 3 - x.$

4. $2\sqrt{x}4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x}2^x + 4.$

5. $2 + \lg(1 + 4x^2 - 4x) - \lg(19 + x^2) = 2 \lg(1 - 2x).$

6. $\log_{(2x^2-1)}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 2 - \frac{1}{\log_3(2x^2-1)}.$

7. $x^{\lg x} = 1000x^2.$

8. $\log_4 \log_2 \frac{x}{2} = -\log_4 \log_4 x.$

9. $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0.$

10. $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2.$

11. $\frac{3}{2} \log_5^2(2x - 3)^2 + 12 \log_5^2 \sqrt{x} = \log_5(2x - 3)^3 (\log_5 x^3).$

12. Решить уравнение для всех значений параметра a :
 $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1.$

5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Общий метод решения тригонометрических уравнений связан со сведением их с помощью замены переменных к алгебраическим и использованием определения тригонометрических функций, учитывая все необходимые условия.

Остановимся сначала на четырех прямых тригонометрических функциях: синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе. Определив синус как ординату единичного вектора, мы сразу же получим не только хорошую интерпретацию формулы корней уравнения $\sin x = A$ (рис. 1).

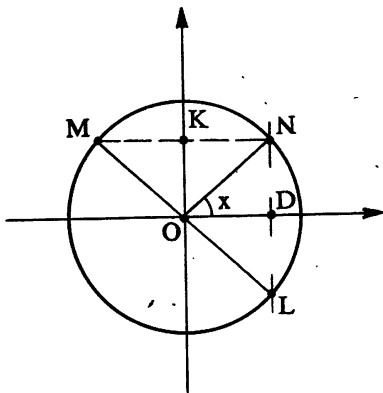


Рис. 1

Действительно, если мы проведем угол величины x по отношению к оси абсцисс, считая против часовой стрелки, продолжая его сторону до пересечения с окружностью единичного радиуса, то угол NOD — угол, образованный единичным вектором с осью абсцисс. В соответствии с данным нами определением *синус* угла x численно равен величине отрезка OK . Продолжая отрезок NK влево за ось ординат до второго пересечения с окружностью, мы получим точку M . При этом *синус* угла MOD также будет измеряться отрезком OK . Если мы обозначим величину этого отрезка через A , то легко показать, что $\sin x = \sin(180^\circ - x) = A$. Разумеется, все наши рассуждения имеют смысл лишь тогда, когда $|A| \leq 1$! Косинус определяется как абсцисса единичного вектора. Для этого надо из точки N (см. рис. 1) опустить высоту на ось абсцисс. Тогда величина отрезка OD численно равна косинусу угла x . По аналогии с предыдущими рассуждениями легко сообразить, что продолжая отрезок ND под ось абсцисс до второго пересечения с окружностью, получаем точку L , абсцисса которой также равна отрезку OD . Следовательно, обозначая величину отрезка OD через B , имеем: $\sin x = \sin(-x) = B$.

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник OND . Записав теорему Пифагора и учитывая, что отрезки ND и OK равны как противоположные стороны прямоугольника, имеем: $|OK|^2 + |OD|^2 = |ON|^2$. С учетом введенных ранее обозначений и имея в виду, что мы имеем окружность единичного радиуса, запишем: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Это соотношение называется *основным тригонометрическим тождеством*, однозначно связывающим синус и косинус одного и того же аргумента (с точностью до знака). Функция *тангенса* определяется как отношение синуса к косинусу одного и того же аргумента, при условии, что косинус отличен от нуля. *Котангенс* — это величина, обратная к тангенсу, при условии, что синус отличен от нуля.

Следует также знать величины всех четырех прямых тригонометрических функций углов: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Но, пожалуй, самое главное — это формулы, которые следует не только хорошо знать, но и понимать, как одни из них выводятся через другие. Это позволит запоминать не все формулы, а только несколько базисных, через которые можно вывести все остальные. Здесь можно дать два полезных совета. *Первый*: при применении формул суммы или произведения тригонометрических функций полезно на первое место ставить функцию с большим значением

аргумента. При перемене слагаемых или сомножителей ни сумма, ни произведение не изменятся. Но теперь разность или полуразность аргументов, входящие в правую часть этих формул, всегда будут положительными. *Второй:* с помощью формул суммы или разности можно получить формулы двойных, тройных и т. д. углов, а также — конкретные значения для углов, отличающихся от табличных на величину, кратную 90° .

Перейдем теперь к *обратным тригонометрическим функциям*, которые присутствуют в школьной программе, но которым не всегда уделяется достаточное внимание. Попробуем выразить y через x , для этого в функции синуса $y = \sin x$ поменяем переменные местами, получим: $x = \sin y$. Эта попытка приводит нас к функции, обратной к синусу. Она называется арксинусом. В соответствии с тем, о чем мы только что сказали, *арксинус x* это такой угол y , синус которого равен x . Но давая определение самого синуса, мы увидели, что в первой и второй четвертях декартовой системы координат есть два различных угла с равными ординатами, а значит, и с равными значениями синусов. Но любая элементарная функция должна быть определена однозначно. Поэтому арксинус мы должны определить так, чтобы было взаимно однозначное соответствие между функцией и аргументом. Однозначность пересечения прямой, параллельной оси абсцисс, с окружностью единичного радиуса, а значит, однозначность синуса, имеет место в I и IV, II и III четвертях. В принципе мы можем взять любую пару четвертей, но договорились брать I и IV четверти. Поэтому функция арксинуса определена на отрезке от

$-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Записывается это так: $y = \arcsin x$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Обратим внимание на то, что в отличие от прямых тригонометрических функций, которые являются периодическими, обратные функции таковыми не являются.

Аналогично определяются все остальные обратные тригонометрические функции. *Арккосинус x* — это такой угол, косинус которого равен x . *Арктангенс x* — это такой угол, тангенс которого равен x . *Арккотангенс x* — это такой угол, котангенс которого равен x . Для этих функций также должно существовать взаимно однозначное соответствие между функцией и аргументом. Поэтому, арктангенс определен в I и IV четвертях, а арккосинус и арккотангенс — в I и II четвертях. Аналитически это можно записать следующим образом:

$$y = \arcsin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leq 1;$$

$$y = \arccos x, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad |x| \leq 1;$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad 0 < y < \pi.$$

Для решения конкретных задач полезно знать также формулы преобразования обратных тригонометрических функций. Дадим шесть из них, которые получаются, если использовать формулы преобразования прямых тригонометрических функций и функциональную связь прямых и обратных тригонометрических функций (принципиальная схема получения этой связи будет дана при разборе примера 3 этого раздела):

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad |x| \leq 1;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leq 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Полезно также знать, как сворачивается в произведение алгебраическая сумма синуса и косинуса одного и того же аргумента: $a \sin x + b \cos x$.

Для получения результата умножим и разделим заданное выражение на $\sqrt{a^2 + b^2}$. При этом мы правда должны быть уверены в том, что это выражение отлично от нуля. Но последнее возможно лишь тогда, когда $a = b = 0$. Но в этом случае исходного выражения не существует. Поэтому разумно предположить, что ни a , ни b не обращаются одновременно в нуль. Имеем

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right).$$

Дроби, стоящие перед синусом и косинусом, можно интерпретировать как косинус и синус одного и того же аргумента. Действительно, легко показать, что каждая из этих дробей по модулю меньше 1, а сумма квадратов дробей равна 1, что эквивалентно выполнению основного тригонометрического тождества. Обозначая первую из этих дробей через $\cos n$, а вторую — через $\sin n$, получим: $\sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos n + \cos x \sin n)$. Или, сворачивая стоящую в скобках формулу синуса суммы: $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + n)$.

Теперь наша задача свелась к тому, чтобы выразить введенный нами новый угол через a и b . Для этого можно просто использовать введенные нами подстановки, т. е. первую или

вторую дробь. В одном случае новый угол будет выражаться через арккосинус дроби, а в другом — через арксинус. Но еще более простое выражение мы получим, если разделим вторую дробь на первую. Тогда тангенс нового угла n будет равен $\frac{b}{a}$, а сам угол арктангенсу $\frac{b}{a}$. Теперь можем записать окончательный вид выводимой формулы:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right). \quad (12)$$

Хочется обратить внимание читателя на то, что a и b — любые числа, одновременно не обращающиеся в нуль, или переменные выражения.

Теперь мы уже готовы к тому, чтобы перейти к разбору примеров и их самостоятельному решению. Но давайте предварительно остановимся на форме записи ответов к тригонометрическим уравнениям. Решая уравнение $\sin x = A$, мы прежде всего должны предположить, что $|A| \leq 1$. В противном случае решений нет. В случае $|A| \leq 1$ один из ответов может быть записан $x_1 = \arcsin A$. Но в соответствии с рис. 1 и сделанными пояснениями, во II четверти также есть угол с таким же значением синуса. Его величина дает нам второй ответ $x_2 = \pi - \arcsin A$. С учетом периодичности синуса и косинуса окончательный ответ: $x_1 = \arcsin A + 2\pi R$; $x_2 = \pi - \arcsin A + 2\pi R$. Два этих корня могут быть объединены в одной записи: $x = (-1)^m \arcsin A + m\pi$. Легко заметить, что при четных значениях m мы получим первый из ответов, а при нечетном значении — второй.

Пример 1. Вычислить все прямые тригонометрические функции от 15° .

Рассмотрим, как можно найти $\sin 15^\circ$ (и аналогично — косинус, тангенс и котангенс). Для нахождения синуса есть по крайней мере два пути. Первый путь связан с использованием формулы косинуса двойного угла через синус половинного. Подставляя в левую часть этой формулы 30° , в правой части получим синус 15° . Косинус 30° нам известен, поэтому мы получим одно уравнение с одним неизвестным — синусом 15° , которое и можем найти. Второй путь решения этого примера представляется более простым. Зная, что $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, и используем формулы синуса разности. В результате получим $\sin 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Пример 2. Доказать, что для всех $|x| \leq 1$ выполняется тождество:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Как правило, общим методом решения примеров, связанных с обратными тригонометрическими функциями, является применение к этим функциям прямых тригонометрических функций. В данном случае это можно сделать, применяя к левой и правой частям любую из прямых тригонометрических функций и показывая, что полученные выражения равны между собой. Но, руководствуясь соображениями целесообразности, следует все-таки остановиться либо на синусе, либо на косинусе. Если же мы предварительно перенесем $\arccos x$ в правую часть, то, взяв синус от обеих частей и используя формулы приведения, сразу же получим требуемый результат: $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$.

Пример 3. Вычислить $\cos(\arcsin x)$.

Общим методом решения подобных примеров является использование прямых функций, соответствующих обратным. В данном случае следует использовать синус. В соответствии с определением арксинуса $\sin(\arcsin x) = x$. Обозначая $\arcsin x = a$, имеем: $\cos a$, если $\sin a = x$. Для получения результата достаточно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством. Получаем ответ: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Пример 4. Решить уравнение $\sin x + \sin 4x + \sin 7x = 0$.

Анализ аргументов приводит нас к тому, что следует сгруппировать первую и последнюю величины, применить формулу суммы синусов (можно при этом использовать данный ранее совет и поменять слагаемые местами). Будем иметь: $\sin 4x(2\cos 3x + 1) = 0$. Приравнявая к нулю множители в левой части, получаем ответ: $x_1 = \frac{\pi n}{4}$; $x_2 = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$.

Пример 5. Решить уравнение $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 = 3 + \cos y - y^2$.

При решении примеров с двумя переменными мы уже сказали о том, что следует анализировать отдельно левую и правую части. Так следует поступить и в данном случае. В левой части стоит сумма двух взаимобратных положительных чисел. В соответствии с третьим следствием из неравенства о среднем арифметическом, и средним геометрическим эта сумма не менее 2. С учетом того, что левая часть возводится в квадрат, она будет не менее 4. Следовательно, минимальное значение левой части равно 4. Проанализируем теперь правую часть. Максимальное значение $\cos y$ равно 1, а максимальное значение $(-y^2)$ равно нулю. Поэтому максимальное значение правой части равно 4.

Значит, равенство левой и правой частей возможно тогда и только тогда, когда левая и правая части одновременно будут равны 4. Отсюда получаем ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $y = 0$.

Пример 6. Решить уравнение: $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$.

Если мы перенесем выражение $2\cos x$ в правую часть, то получим уже известное нам иррациональное уравнение основного вида. Возведем теперь обе части в квадрат при условии $-2\cos x \geq 0$, имеем: $5\sin x + \cos 2x = 4\cos^2 x$. Введем новую переменную $a = \sin x$; $|a| \leq 1$. Получим после преобразований и приведения подобных членов уравнение $2a^2 + 5a - 3 = 0$, корни которого равны $a_1 = -3$; $a_2 = \frac{1}{2}$. Первый из этих корней является посторонним с учетом условий, наложенных на дополнительную переменную, а второй — дает нам ответ по искомой переменной $x_1 = \frac{1}{6}\pi + 2\pi n$; $x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$. Но с учетом условия возведения в квадрат, первый из этих корней, дающий положительное значение косинуса, нас не устраивает. Поэтому окончательный ответ: $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{25 - 4x^2} (3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$.

Область значений уравнения определяется условием неотрицательности подрадикального выражения, которое приводит нас к неравенству: $-2,5 \leq x \leq 2,5$. Далее, приравнявая к нулю первый множитель, получаем корни: $x = \pm 2,5$. Приравнявая к нулю скобку и используя формулу синуса двойного угла, получаем: $2\sin \pi x (3\cos \pi x + 4) = 0$. Выражение, стоящее в скобках, обращается в нуль при $\cos \pi x = -\frac{4}{3}$, что невозможно, так как синус не может быть меньше -1 . Приравнявая к нулю $\sin \pi x$, получаем: $\pi x = \pi n$ или $x = n$, где n — любое целое число. Значит, x также может быть любым целым числом, но с учетом области значений данного уравнения и полученного ранее ответа окончательное решение выглядит так: $x = 0$; ± 1 ; ± 2 ; $\pm 2,5$.

Задания для самостоятельной работы к разделу 5

1. Доказать, что для любого a : $\operatorname{tg} 6a - \operatorname{tg} 4a - \operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 4a \operatorname{tg} 6a$.
2. Вычислить $\sin^3 a - \cos^3 a$, если $\sin a - \cos a = m$.
3. Вычислить $\sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10}$.

4. Доказать, что $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 3$.

5. Найти все решения $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -2$, удовлетворяющие условию $(2/5)\pi < x < (6/7)\pi$.

Решить уравнения:

6. $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$.

7. $12 - 6 \cos^2 x - 13 \sin x = 0$.

8. $\cos x + \cos 6x + \cos 11x = 0$.

9. $(x-2)^2 |\cos x| = \cos x$.

10. $\sqrt{5 \cos x - \cos 2x} + 2 \sin x = 0$.

11. $\sin\left(\frac{4\pi}{3} \sin x\right) = 1/2$.

12. $\sin 6x \operatorname{ctg} 4x \operatorname{tg} 3x = 0$.

13. $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (\sin y + \cos y) + 2 = 0$.

14. $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^{\sin x} + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^{\sin x} = 10/3$.

15. $\sqrt{2 - |y|} (5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3 \sqrt[3]{33}) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5}{4} \pi^2$.

6. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

К целочисленным задачам мы отнесем уравнения, неравенства, текстовые задачи, переменные величины которых должны принимать целочисленные значения. В школьном курсе методы решения таких задач не проходят. Исключения составляют факультативные занятия. Строго говоря, существуют строго формальные подходы и методы решения целочисленных задач. В ряде случаев их изложение можно вписать в рамки школьной программы. Однако мы не будем делать этого по той простой причине, что преследуем конкретную цель: дать методы решения целочисленных задач, которые предлагались в разные годы на вступительных экзаменах. Причем дать эти методы таким образом, чтобы они были доступны любому читателю независимо от того, в какой школе он обучается, есть ли в этой школе факультатив по математике и как давно он закончил школу.

Итак, суть всех методов, которые мы условно разобьем на три группы, состоит: в использовании признаков делимости; учете свойств тех элементарных функций, которые входят в задачу; переборе на ограниченном множестве или привлечении «замыкающих» (т. е. двойных) неравенств. Приведенное деление достаточно условно. Для решения реальных задач, предлагаемых

на экзаменах, часто следует применять комбинацию этих методов. Но если вы испытываете трудности при решении задач этого класса, то следует постараться освоить эти методы в чистом виде. Сделаем это, разбирая конкретные примеры задач, даваемых в разные годы на экзаменах, причем каждая задача важна не только сама по себе, но представляет для читателя еще интерес как иллюстрация применения того или иного метода решения целочисленных задач. Постарайтесь запомнить именно тот подход, с помощью которого удалось решить данную задачу.

Пример 1. Определить натуральное шестизначное число, если известно, что: число начинается с единицы; сумма его цифр кратна 7; сумма цифр следующего натурального числа также кратна 7.

Читатель может заметить, что признак делимости на 7 не проходит в школе. Но для решения данного примера это и не требуется. Для решения надо знать только следующее: если два числа кратны 7, то их сумма, разность и произведение также кратны 7. Действительно, сумма цифр искомого натурального числа — это тоже конкретное натуральное число. То же самое можно сказать и о сумме цифр следующего натурального числа. По условию обе суммы цифр кратны 7, значит, их разность тоже должна быть кратна 7. Из этого следует, что искомое число может оканчиваться только цифрой 9. Почему? Потому что в противном случае первые пять цифр нашего и следующего за ним числа будут одинаковыми, а последние цифры будут отличаться на единицу. Отсюда следует, что и разность между суммами цифр искомого и следующего за ним чисел тоже будет отличаться на единицу, которая не кратна 7. Поэтому это нас не устраивает. Следовательно, наше число оканчивается цифрой 9. В принципе теперь точно так же можно проанализировать и предпоследнюю цифру искомого числа и прийти к тому, что это 9. Можно поступить иначе. Обобщим результат. Пусть в конце у искомого числа стоит несколько девяток. Обозначим их число через k . Тогда как будет выглядеть следующее число? Там, где у искомого числа стояли девятки, появятся нули, а первая цифра, отличная от девятки, увеличится на единицу. Тогда, с точностью до знака, изменение суммы цифр искомого и следующего за ним числа будет равно $9k - 1$. Причем, по высказанному ранее утверждению, эта величина должна быть кратна 7. Но чему может быть равно k ? Всего цифр 6, но на первой позиции по условию стоит 1. Поэтому для k должно выполняться условие: $1 \leq k \leq 5$. На этом отрезке нам подходит только k равное 4. Значит, последние четыре цифры искомого числа девятки, а первая равна 1. Осталось определить только вторую цифру. Обозначим ее через a . Тогда сумма цифр искомого числа равна $37 + a$. И эта величина по условию должна быть кратна 7. Поскольку a — это цифра, то она должна лежать на отрезке от 0 до 9. Нас устраивает только $a = 5$. Поэтому окончательный ответ: искомое число это 159999.

Пример 2. Известно, что для натуральных m и n дробь m/n является несократимой. На какое целое число может быть сокращена дробь $\frac{2n-m}{5n+m}$?

В данном случае, как и в предыдущем примере, будем опираться на признаки делимости. Если дробь сократима, то ее числитель и знаменатель могут быть разложены на целочисленные множители, среди которых обязательно окажется хотя бы один общий. Наша задача его определить. Обозначим его через a . Тогда числитель можно представить в виде $2n-m=ab$, а знаменатель $5n+m=ac$; где a, b, c — целые числа, причем $a \neq 1$. Единственное условие, на которое мы можем опираться, — это несократимость дроби m/n . Выразим из наших зависимостей m и n : $7n=ab+ac$; $7m=-5ab+2ac$. Разделим каждое из этих неравенств на a : $\frac{7n}{a}=b+c$; $\frac{7m}{a}=-5b+2c$. Правые части этих неравенств — целые числа. Значит и левые части — тоже целые числа. Проанализируем дроби, стоящие в левой части. Возможно одно из двух. Либо 7 кратно a , но тогда $a=7$. Либо 7 не кратно a , но тогда m и n должны быть одновременно кратны 7, что противоречит условию о несократимости дроби m/n . Значит, ответом является число 7.

Пример 3. На заводе есть несколько одинаковых поточных линий, выпускающих 15000 банок консервов в день. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 5. Ежедневный выпуск банок стал составлять 33792 банки. Сколько поточных линий было на заводе до реконструкции?

Здесь мы имеем дело с текстовой задачей. Искомая переменная — количество поточных линий до реконструкции — целое число. Обозначим это число через a . Тогда условие задачи может быть записано следующим образом: $\frac{33792}{a+5} > \frac{15000}{a}$. Дробь, стоящая в левой части, соответствует производительности каждой поточной линии после реконструкции, в правой — до реконструкции. Неравенство говорит о том, что линии стали более производительными. Решая это неравенство, получим: $a > 3\frac{776}{783}$, но

учитывая, что a — целое число, $a \geq 4$. Кроме того, по смыслу само значение производительности тоже должно быть целым числом, так как оно показывает нам количество выпущенных банок. Значит, дроби, стоящие в обеих частях неравенства, — целые числа. Это возможно лишь тогда, когда числитель нацело делится на знаменатель. Разложим числители дробей на простые множители в виде $33792 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 11 \cdot (a+5)$; $15000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot a$. Напомним, что знак $:$ обозначает деление без остатка. Конечно,

теперь мы можем использовать перебор на ограниченном множестве. Нижняя граница величины a равна 4, а верхняя 15000. Но это очень большая область перебора. Сократим ее, используя стандартный подход, суть которого связана с использованием либо признака делимости на 2, либо на 3. При использовании признака деления на 2 все целые числа подразделяются на четные и нечетные. Если же мы применим признак делимости на 3, то все числа следует разбить на три группы: делящиеся на 3 без остатка; дающие при делении на 3 остаток 1 или 2. В данном случае рассмотрим сначала все четные значения a , а затем все нечетные. Если a — четное, то $a+5$ — нечетное. Тогда в соответствии с первым условием делимости $a+5$ не может содержать в своей записи ни одной двойки. Значит $a+5$ может равняться 3; 11; 33. В первом случае a принимает отрицательное значение. Во втором $a=6$, что удовлетворяет всем условиям. В третьем случае $a=28$, что противоречит второму условию сократимости. Пусть теперь a — нечетное. Но тогда в соответствии с вторым условием делимости a может содержать в своей записи множители, равные 3 или 5. Но если a будет содержать в своей записи множители, равные 5, то $a:5$, но тогда $a+5$ также будет делиться без остатка на 5. А это противоречит первому условию делимости, так как в левой его части нет ни одной пятерки. Значит, единственным возможным вариантом в данном случае $a=3$. Но это противоречит полученному в начале условию $a \geq 4$. Поэтому единственный ответ задачи: до реконструкции было 6 линий.

Пример 4. Найти положительные решения уравнения. $3x^2 + 3xu + 2x - u = 56$.

Целочисленные уравнения решаются либо перебором на ограниченном множестве (как это делается, мы рассмотрим в примере 7), либо выражением одной переменной через другую. Это выражение, в свою очередь, может быть получено двумя путями: посредством нахождения корней уравнения (пример 5) или непосредственным выражением с выделением целой и дробной частей. Анализу в последнем случае подвергается дробная часть. Именно этот метод мы и применим в данном случае. Но какую из двух переменных следует выражать через остальные или остальную? Обычно останавливаются на той переменной, которая входит в уравнение в меньшей степени. В данном случае это u . Группируем все сомножители, содержащие u , в левой части и выносим u за скобки. Все остальные сомножители переносим в правую часть. Уравнение примет вид $u(3x-1) = -3x^2 - 2x + 56$. Так как мы ищем натуральные решения, то коэффициент при u в левой части не равен нулю. Разделив левую и правую части уравнения на этот коэффициент и выделив частное и остаток, получим

$$u = -x - 1 + \frac{55}{3x-1}.$$

По условию u — натуральное число, значит,

и вся правая часть также должна быть натуральным числом. Для этого необходимо, но недостаточно, чтобы дробь, стоящая в правой части, была целым числом. А это, в свою очередь, возможно лишь тогда, когда $3x-1$ находится среди множителей числа 55. Поэтому выражение $3x-1$ может принять одно из четырех значений: 1; 5; 11; 55. Второй и третий случаи соответствуют целому положительному значению переменной x . Но только второй случай дает нам положительное значение y . В принципе мы решили это уравнение в целых числах, но только при втором случае получается пара целых положительных решений $x=2$; $y=8$.

Пример 5. Решить уравнение в целых числах:
 $15x^2y^2 - 8x^2y + 28y^2x + x^2 + 5y^2 - 38xy + 8x - 24y + 16 = 0$.

В данном случае также следует выразить одну переменную через другую, но используя формулу корней квадратного уравнения и разложение квадратного уравнения на множители: первый множитель — коэффициент при x^2 ; второй — x минус первый корень; третий — x минус второй корень. Следуя этому методу, мы вначале должны представить левую часть уравнения как квадратное уравнение по отношению к переменной x . Для этого мы должны выделить коэффициент при x^2 , коэффициент при x и свободный член, т. е. все выражения, куда x не входит. Далее находят корни уравнения и записывают указанное разложение на множители. После выполнения всех этих действий получим:

$$(5y-1)(3y-1) \cdot \left(x - \frac{4-5y}{3y-1}\right) \left(x - \frac{4-y}{5y-1}\right) = 0. \text{ Приравнивая каждое}$$

выражение в скобках к нулю, получаем, что первые два выражения обращаются в нуль при нецелых значениях переменной. Рассмотрим последние две скобки. Так как x — целое число, то и дроби также должны быть целыми числами. Это возможно только в двух случаях. Во-первых, когда числители дробей равны нулю. При целых значениях y это возможно только в выражении, стоящем в последней скобке. Сразу получаем первую пару решений: $x=0$; $y=4$. Во-вторых, для того чтобы дроби были целыми числами, необходимо, чтобы модуль числителя был не менее модуля знаменателя. Представляя дробь, стоящую в третьей

скобке, в виде $\frac{4-5y}{3y-1} \sim -1 + \frac{3-2y}{3y-1}$ и решая соответствующие

неравенства, получаем $x=-4$; $y=0$ и $x=-2$; $y=-2$. Таким образом, уравнение имеет три пары целочисленных решений.

Пример 6. Имеется некоторое количество проволоки. Если ее намотать на катушки, на каждую из которых уместается по 800 метров, то одна катушка будет намотана не полностью. То же самое произойдет, если пользоваться катушками, на которые уместается по 900 метров проволоки, причем таких катушек понадобится на 3 меньше. Если же проволоку наматывать на

катушки, на которые умещается по 1100 метров, то таких катушек понадобится еще на 6 меньше, но при этом все они будут намотаны полностью. Сколько метров проволоки было?

Задачи подобного типа следует решать методом замыкающих неравенств. Начинать при этом следует с того условия, которое дано в виде равенства. В нашем случае это тот вариант намотки, когда вся проволока была намотана полностью. Обозначим количество катушек емкостью 1100 метров через x , тогда количество 900-метровых катушек $(x + 6)$, а 800-метровых — $(x + 9)$. Общее количество проволоки можно определить, если умножить количество полностью намотанных катушек на емкость одной из них: $1100x$. Перейдем теперь к неполностью намотанным катушкам, начнем с 800-метровых. По условию, одна из этих катушек оказалась намотанной не полностью. Значит, если эта катушка была заполнена до конца, то потребовалось бы проволоки больше, чем мы имеем. С другой стороны, если отбросить эту не полностью намотанную катушку, то на остальных останется проволоки меньше, чем было вначале. В соответствии с этим можно написать следующее двойное неравенство: $800(x + 8) < 1100x < 800(x + 9)$. Рассуждая аналогично, мы приходим к неравенству для 900-метровых катушек: $900(x + 5) < 1100x < 900(x + 6)$. Решая эти неравенства как систему и принимая во внимание целочисленность искомой переменной, получаем, что первоначально было 25300 метров проволоки.

Пример 7. Решить уравнение в целых числах: $4p^2 + 3q^2 + 5s^2 - 24q - 1 = 0$.

Здесь мы имеем дело с одним уравнением с тремя переменными. Для его решения, во-первых, мы можем применить метод, рассмотренный в примере 5. Но в данном случае анализ будет более сложным. Во-вторых, применить перебор на ограниченном множестве. Так именно и следует поступать, когда в левой части уравнения удастся выделить сумму неотрицательных сомножителей, а в правой — неотрицательную константу. При этом предлагаемый ниже метод не зависит от количества переменных в исходном уравнении. Для получения в левой части уравнения неотрицательных сомножителей перепишем уравнение в следующем виде: $4p^2 + 5s^2 + 3(q - 4)^2 = 49$. Из него следует, что ни одно слагаемое в левой части не может превышать 49. В противном случае сумма квадратов должна равняться отрицательному числу, что невозможно. Таким образом, мы имеем верхнюю границу для каждого слагаемого. Она равна 49. Нижняя граница в силу неотрицательности квадратичной функции равна 0. Значит, каждое слагаемое в левой части лежит на отрезке от 0 до 49. И мы можем провести перебор на ограниченном множестве. При этом, если невозможно использовать соображения кратности, перебор следует начинать со слагаемого с максимальным постоянным коэффициентом, так как соответствующий переменный множи-

тель будет иметь самую маленькую верхнюю границу. В данном случае это $5s^2$. Имеем $5s^2 \leq 49$, или $s^2 \leq 49/5$. Так как s — целое число, то s^2 может принять лишь одно из четырех значений: 0; 1; 4; 9. Следует рассмотреть каждый из этих случаев. Если $s^2 = 0$, то уравнение примет вид $4p^2 + 3(q-4)^2 = 49$. Рассуждая аналогично, приходим к тому, что p^2 может принять значения: 0; 1; 4; 9. Перебирая поочередно все эти значения, мы получаем четыре уравнения с одним неизвестным q . Но ни одно из этих уравнений не дает целого решения для q . Точно также анализируем остальные значения для s^2 . В результате приходим к тому, что только при значениях $s^2 = 9$; $p^2 = 1$ возможно целое решение для $q = 4$. Следовательно, решением уравнения будет: $p = \pm 1$; $s = \pm 3$; $q = 4$.

Пример 8. Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду — 14 кг, льву — 21 кг. Известно, что у каждого льва ежедневно бывает 230 посетителей, у каждого леопарда — 160, у каждой лисы — 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневно число посетителей у этих животных было максимальным?

Несмотря на всю внешнюю непохожесть этого и предыдущих примеров, их можно решить одним и тем же методом — перебором на ограниченном множестве. Обозначим искомое количество лис, леопардов и львов соответственно через a , b и c . Тогда условие распределения 111 кг мяса будет записано так: $2a + 14b + 21c = 111$, а ежедневное число посетителей, которое мы обозначим через N : $N = 20a + 160b + 230c$. Преобразуем правую часть последнего соотношения: $N = 20a + 140b + 210c + 20(b + c) = 1110 + 20(b + c)$. Теперь мы видим, что максимальное значение N достигается при максимальном значении суммы $b + c$. Вернемся теперь к соотношению распределения мяса между животными. По смыслу задачи в левой части стоит сумма неотрицательных величин, поэтому ни одна из них не может превышать 111. Начинаем перебор с величины $21c$: $21c \leq 111$. Значит $c \leq 5$. Кроме того, очевидно, что c не может быть четным, так как в этом случае левая часть соотношения будет равна сумме четных чисел и, следовательно, сама будет четным числом, в то время как правая часть нечетна. Значит, c может принять одно из трех значений: 1; 3 или 5. Рассмотрим каждое из них. Но при фиксированном значении c максимальное значение суммы $b + c$ достигается при максимально возможном значении b . На этом простом факте основано дальнейшее решение. Подставляя $c = 1$ в первое соотношение, получим после сокращения на 2: $a + 7b = 45$. Максимально возможное значение $b = 6$. И, значит, $a = 3$. Подставляя оставшиеся значения c в первое соотношение и рассуждая аналогично, мы получим еще два возможных варианта решений: $a = 3, b = 3, c = 3$ и $a = 3, b = 0, c = 5$. Из трех полученных наборов решений максимальное значение суммы $b + c = 7$.

достигается в первом случае. Он и дает ответ задачи: в зоопарке должно быть 3 лисы, 6 леопардов и 1 лев.

Задания для самостоятельной работы к разделу 6

1. На заводе несколько одинаковых прессов, штампующих в день 6480 деталей. После реконструкции все прессы заменили на одинаковые, более производительные, а их количество увеличилось на 3. Завод стал штамповать 11200 деталей в день. Сколько прессов было первоначально?

2. После деления двухзначного натурального числа на сумму его цифр в частном получается 7, а в остатке 6. А после деления этого же числа на произведение его цифр в частном получается 3, а в остатке 11. Найти это натуральное число.

3. При подведении итогов месяца выяснилось, что процент числа членов бригады, перевыполнивших месячное задание, заключен в пределах от 92,5 до 93,5%. Определить минимально возможное число членов этой бригады.

4. Определить, сколько точек с целочисленными координатами находятся внутри фигуры, образованной осью абсцисс, прямыми $x=50$, $x=244$ и графиком функции $y=\log_3(x+1)$? Точки, лежащие на границе фигуры, не учитывать.

5. На покупку красных и белых роз можно затратить не более 61 рубля. Красная роза стоит 2,5 рубля, белая — 3 рубля. Число красных роз не должно отличаться от числа белых роз более чем на 4. Необходимо купить максимально возможное количество красных и белых роз, при этом белых роз как можно меньше. Сколько роз и каких надо купить?

6. Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 часа раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у всех одинакова.

7. Квартал застроен пяти- и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пяти- и девятиэтажных домов?

8. Ученики второго, третьего и четвертого классов собирали макулатуру. Второклассники работали по 3 дня, третьеклассники — по 12 дней, четвероклассники — по 16 дней. При этом каждый второклассник собрал по 30 кг, каждый третьеклассник — по 130 кг, четвероклассник — по 170 кг макулатуры. Все

дети вместе отработали 95 дней. Сколько учеников каждого класса участвовало в работе, если общее количество собранной макулатуры оказалось максимальным?

9. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Определить сколько каких оценок получила группа.

10. Квадрат натурального числа, увеличенный на 2, делится без остатка на неполное частное от деления искомого числа на 4 и дает в результате 201. Найти это натуральное число.

11. На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D . Расстояния от пункта A до пунктов B, C и D находятся в отношении 1:2:4. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт B обогнали 3 автобуса. Второго после выхода из пункта A и до прихода в пункт C обогнали 4 автобуса; известно, что, когда он выходил из пункта A , через пункт A не проезжал очередной автобус. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D , когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнало третьего пешехода в пути между A и D ?

12. Группу людей попытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Тогда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд: все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше, чем в первом случае. Если бы тех же людей попытались построить по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем один ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

13. Известно, что для натуральных m и n дробь m/n является несократимой. На какое целое число может быть сокращена дробь $\frac{2n-m}{3n+2m}$?

14. 52 землекопа, работающих с одинаковой производительностью, были разбиты на две бригады, каждая из которых вырыла по одинаковому котловану. Обе бригады работали с перерывами на отдых. Первая бригада, закончив работу на 1 час позже второй, отдыхала не менее полутора часов. Вторая бригада отдыхала не более 1 часа 20 минут. Если бы обе бригады работали без перерывов, то первая могла бы вырыть котлован в 1,5 раза больше, а вторая — в 1,4 раза больше. Определить число землекопов в каждой бригаде.

15. В группе каждый из учащихся знает хотя бы один иностранный язык: английский, французский или немецкий; и нет ни одного учащегося, который бы знал все три указанных языка. 13 учащихся знают лишь по одному иностранному языку. Никто из группы не знает одновременно французский и немецкий, но половина учащихся, владеющих английским, знает еще один иностранный язык. Девушек, знающих английский, в 2 раза больше, чем учащихся, знающих только немецкий, и в 4 раза больше, чем учащихся, знающих только французский. Определить, сколько учащихся в группе, если юношей, знающих английский, в n раз больше, чем учащихся, знающих только французский, причем $3 \leq n \leq 15$; n — целое число.

Решить уравнения в целых числах:

$$16. 2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

$$17. 2x^2 - 2xy + x + 3y = 36.$$

$$18. 5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30.$$

$$19. 2x^2 + y^2 + 7z^2 + 2x^2y^2 - 42z + 33 = 0.$$

$$20. 9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Для решения задач этого раздела надо хорошо знать и понимать определение, аналитический и геометрический смысл производной, которые достаточно хорошо изложены в школьных учебниках. Производная — это важнейшая характеристика поведения данной функции в данной точке. В частности она определяет тип монотонности функции, необходимые и достаточные условия экстремумов. Зная производную, мы можем легко записать уравнение касательной к данной функции с абсциссой в заданной точке. Кроме того, следует знать основные правила и формулы определения производной. Напомним их.

Правила позволяют, зная производную той или иной функции, найти производную их алгебраической комбинации. Можно также вычислить производную от функции, аргументом которой является функция. Если $f(x)$ и $g(x)$ — элементарные функции, имеющие производные, а b — константа, то

$$1) b' = 0;$$

$$2) (bf(x))' = bf'(x);$$

$$3) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{fg' - g'f}{g^2}, \quad g \neq 0;$$

$$5) (f \cdot g)' = f'g + f \cdot g';$$

$$6) (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Опираясь на эти правила и определение производной, можно получить производные основных элементарных функций. Итоговые формулы таковы:

$$1) (x^b)' = bx^{b-1};$$

$$2) (\sin x)' = \cos x;$$

$$3) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$4) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$5) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a; \quad a > 0;$$

$$7) (e^x)' = e^x;$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad a > 0, a \neq 1.$$

$$9) (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

К этим девяти формулам мы добавим еще пять, которые полезно знать для решения конкурсных задач. И хотя знание этих формул явным образом не входит в школьную программу, но они легко выводятся на базе уже известных нам правил и формул. Метод, который мы применим, назовем функциональным методом получения производной. Советуем обратить на него внимание. Первые формулы связаны с производными от четырех обратных тригонометрических функций. Начнем с функции $y = \arcsin x$. Из определения следует, что $\sin y = x$. Беря производную от левой и правой частей последнего соотношения, применяя

правило 6) и формулы 2) и 1), получим $y' \cos y = 1$, или $y' = \frac{1}{\cos y}$.

Значит, производная функции выражается через функцию. Но, зная, чему равен $\sin y$, мы легко находим $\cos y$. Следовательно,

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Точно таким же образом выводятся производные

трех остальных обратных тригонометрических функций. Далее, найдем производную от $y = x^x$. Эту функцию нельзя отнести ни к степенным, ни к показательным. Но используя функциональный метод, мы можем получить результат. Для этого предварительно берем логарифм по натуральному основанию от левой и правой частей, а затем производную, используя правила

5), 6), формулы 1) и 9). Имеем $y' \frac{1}{y} = \ln x + 1$. Откуда сразу получа-

ем результат. Таким образом, пять полученных формул, дополняющих первые девять, выглядят так:

$$10) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$11) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$12) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$13) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$14) (x^x)' = x^x (\ln x + 1).$$

Напомним, что по знаку производной можно определить участки возрастания или убывания функции: если производная функции положительна на всей области значений, то функция монотонно возрастает на всей области значений, а если производная отрицательна, то функция убывает на всей области значений.

Если при $x = x_0$ производная обращается в нуль, слева от этой точки положительна, а справа отрицательна, то x_0 — точка максимума. А если слева отрицательна, а справа положительна, то x_0 — точка минимума. Не следует путать максимум и минимум с наибольшими и наименьшими значениями. Говоря о максимуме и минимуме, мы имеем в виду определенную окрестность точки x_0 . В то время как наибольшее и наименьшее значения — это соответственно самое большое и самое маленькое значения функции на всей области значений. Для поиска наибольшего и наименьшего значения следует рассчитать значения функции во всех точках, где производная обращается в нуль или не существует (в том числе и на границах области значений). После чего эти значения надо сравнить между собой.

Для решения задач следует также знать уравнение касательной, которое в точке с абсциссой $x = x_0$ имеет следующий вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (13)$$

Пример 1. Вычислить производную $y = \cos(\ln x)$.

Обозначая $g(x) = \ln x$, применяя правило 6) и формулу 3), получаем $y = -\frac{1}{x} \sin(\ln x)$.

Пример 2. Указать тип и участки монотонности функции

$$y = x + \frac{1}{3} \sin 3x.$$

Берем производную, применяя правило 3) и формулу 2): $y = 1 + \cos 3x$. Так как для любого значения аргумента $\cos 3x \geq -1$, то значение производной неотрицательно на всей области значений. Поэтому данная функция монотонно возрастает на всей области значений.

Пример 3. Доказать, что наибольшее значение функции $y = \sin^2 x \cos x$ при $-\pi \leq x \leq \pi$ меньше 0,39.

Поскольку речь идет о наибольшем значении функции, то среди возможных точек мы должны проверить и границы области значений. Подставляя их, получим $y = 0$. Теперь если мы будем получать меньшие значения или равные нулю, то мы их не будем принимать во внимание. Берем производную, приравнявая ее к нулю, получим после соответствующих преобразований

$$\sin^2 x = \frac{2}{3}, \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ или } \sin x = 0. \text{ Но при } \sin x = 0 \text{ значение функ-}$$

ции обращается в нуль. Из двух первых значений мы отбрасываем случай, когда косинус отрицателен. В результате имеем, что наибольшее значение нашей функции равно $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Теперь надо показать, что это число меньше 0,39. Возводя неравенство в квадрат, получаем очевидное: $40000 < 41067$.

Пример 4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами 5; 10, касающейся графика функции $y = -\frac{x^2}{4} + 2x + 6$ и пересекающей в двух различных точках график

функции $y = 6 + \sqrt{8x - x^2}$? Разобьем решение этой задачи. Сначала найдем уравнение всех прямых, проходящих через данную точку и касающихся графика заданной функции. Затем из этих прямых выберем такие, которые дважды пересекают указанный график. На первом этапе нам необходимо использовать уравнение касательной (13). А на втором этапе — надо посмотреть, какое из уравнений в сочетании с уравнением, определяющим последний график, записанные в системе двух уравнений с двумя неизвестными, дает ровно два различных решения. Ведь каждое из этих решений дает нам координаты точек пересечения. Запишем уравнение касательной $y = -\frac{x_0^2}{4} + 2x_0 + 6 + \left(-\frac{x_0}{2} + 2\right)(x - x_0)$.

По условию мы знаем, что эта касательная проходит через точку с координатами 5; 10. Следовательно, если мы подставим координаты этой точки в уравнение касательной, оно должно обратиться в тождество. Подставляя $x=5$, $y=10$, получаем одно уравнение с одним неизвестным x_0 , решая которое, имеем $x_0=4$ или $x_0=6$. Подставив эти значения в уравнение касательной и сделав упрощения, мы получим две прямые: $y=10$ и $y=-x+15$. Решив две системы уравнений, мы получим, что для первой прямой система имеет два совпадающих решения: $x=4$, $y=10$, а вторая система — два различных решения: $x = \frac{13 \pm \sqrt{7}}{2}$, $y = \frac{17 \pm \sqrt{7}}{2}$. Значит ответом задачи является уравнение второй касательной: $y = -x + 15$.

Задания для самостоятельной работы к разделу 7

1. Вычислить производную $y = x \lg x + \cos 5x + \sin 2^x + x^{\lg x}$.
2. Найти все x из интервала $(\pi/2; \pi)$, при которых производная функции $f(x) = (\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos x) \cos x \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ равна нулю.

3. Найти минимум квадрата расстояния от точки с координатами $0; 0,5$ до точек кривой $y = x^2 - 12$.

4. Доказать, что наименьшее значение функции $y = \cos^2 x \sin x$, при $-\pi \leq x \leq \pi$ больше $-7/18$.

5. Хорда AB равна радиусу окружности. Хорда CD проведена так, что площадь четырехугольника $ABCD$ максимальна. Найти величину меньшей из дуг, стягивающих хорду CD .

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $1; 3$, касающейся графика функции $y = 8\sqrt{x} - 7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = x^2 + 4x - 1$.

7. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, у которых одна из боковых граней является квадратом, а периметр нижнего основания равен 12 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислить его величину.

8. Найти координаты пересечения с осью ординат тех касательных к графику функции $y = \frac{3x-1}{x+1}$, которые образуют угол $\pi/4$ с осью абсцисс.

9. Прямая $y = 15x + 9$ касается параболы $y = ax^2 + 9x + 10$. Найти значение параметра a .

10. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1?

11. Касательная к графику функции $y = 1/x^2$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $[5; 9]$. При каком значении c площадь фигуры, ограниченной этой касательной, осью абсцисс и прямой $x = 4$, будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая площадь?

8. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ, НЕ ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПРОИЗВОДНУЮ. НЕРАВЕНСТВА В ГЕОМЕТРИИ

Необходимость выделения этого раздела диктуется двумя причинами. Первая причина заключается в том, что есть определенный круг задач на наибольшие и наименьшие значения, которые либо невозможно решить, используя производную, либо такое решение является значительно более громоздким. Вторая причина в том, что этот раздел специально не выделяется в школьной программе и поэтому вызывают определенные трудности соответствующие задачи, предлагаемые на письменных экзаменах. Кроме того, существует довольно широкий круг

задач, связанных с неравенствами в геометрии, которые довольно просто можно решить аналитическими методами.

В принципе, методы, которыми решаются задачи этого раздела уже были даны нами в предыдущих разделах. Здесь мы лишь сгруппируем их. К первой группе относятся методы, опирающиеся на неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом и следствия из него. Ко второй группе относятся методы, опирающиеся на свойства квадратного трехчлена. К третьей группе — методы, опирающиеся на свойства остальных элементарных функций. Выделение во вторую группу методов вызвано лишь высокой частотой их применения. Посмотрим, как работают эти методы на разборе конкретных примеров.

Пример 1. Найти наибольшее значение $y = (1-x)^5(1+2x)^2(1+x)$, $-0,5 \leq x \leq 1$.

Теоретически эту задачу можно решить с помощью производной. Но давайте подумаем: в первой части стоит функция восьмой степени от x . Взятие производной даст нам уравнение седьмой степени, которое, конечно, можно попытаться разложить на три квадратичных и один линейный множитель. Но это достаточно трудоемкая процедура. С другой стороны, если мы сообразим, зачем нам задана область значений, мы поймем, какой метод решения стоит попробовать применить. Заданная область значений обеспечивает нам неотрицательность всех сомножителей в правой части. В теме «Алгебраические неравенства» (см. разд. 2) было сказано о том, что если явно или неявно задается неотрицательная область значений, то можно попытаться применить неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом или следствия из него. Посмотрим, чему равна сумма восьми неотрицательных сомножителей в правой части: $5 - 5x + 2 + 4x + 1 + x = 8$. Мы видим, что сумма неотрицательных сомножителей постоянна, значит, в соответствии со следствием 2.2.1 их произведение максимально, когда они равны между собой. Приравняв сомножители, имеем значение $x = 0$. Это число принадлежит области значений, поэтому максимальное значение y равно 1.

Пример 2. Найти наименьшее значение $y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$.

Так как знаменатель не обращается в нуль в области действительных чисел, то вся эта область является областью значений. Разделив числитель на знаменатель, получим:

$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}$. Теперь мы имеем сумму двух взаимно

обратных положительных чисел, которая в соответствии со следствием 2.2.3 не меньше 2. Значит, потенциальным ответом явля-

ется 2, но надо показать, что это значение достижимо, т. е. что соответствующее неравенство может стать равенством в области значений. Для этого надо показать, что уравнение

$$x^2 + x + 1 = \frac{1}{x^2 + x + 1} = 1 \text{ имеет действительные решения. Легко}$$

видеть, что значения $x=0$ и $x=-1$ являются такими решениями. Следовательно, ответом является 2. Но обратим внимание на то, что если бы мы решали аналогичные уравнения со свободным членом, большим $5/4$, то оно не имело бы действительных решений. Вывод: всегда надо стремиться указать, что ответ достижим на области значений переменной. Причем, если это специально не требуется, то сами значения аргумента можно не указывать.

Пример 3. Известно, что $36x^2 + 16y^2 = 9$, найти наибольшее значение $a = y - 2x$.

Из последнего равенства следует, что $y = a + 2x$. Подставляя это выражение в первое равенство, получим после упрощений: $100x^2 + 64ax + 16a^2 - 9 = 0$. Для того чтобы это квадратное уравнение имело действительные корни, необходимо, чтобы его дискриминант был неотрицателен. Решая соответствующее неравенство, получаем: $-1,25 \leq a \leq 1,25$. Следовательно, потенциально наибольшим значением a может быть верхняя граница этого неравенства, так как в противном случае не существует действительного значения x , удовлетворяющего условиям задачи. Но мы должны показать, что это значение достижимо. Это легко можно сделать, учитывая, что при этом значении a дискриминант последнего уравнения равен нулю. Предлагаем самостоятельно убедиться в этом и получить соответствующие значения $x = -0,4$, $y = 0,45$. И теперь мы можем утверждать, что ответом примера является 1,25.

Пример 4. Найти наибольшее значение $y = \sin^{18}x + \cos^{30}x$.

Понятно, что производная здесь не поможет. Попробуем использовать свойства тригонометрических и показательных функций. Мы знаем, что оба слагаемых в правой части неотрицательны и лежат на отрезке от 0 до 1. С другой стороны, из свойств показательной функции мы можем записать два очевидных неравенства $\sin^{18}x \leq \sin^2x$ и $\cos^{30}x \leq \cos^2x$, складывая которые, имеем: $y = \sin^{18}x + \cos^{30}x \leq \sin^2x + \cos^2x = 1$. Значит, потенциальным ответом является 1, больше которого значений y не может быть никогда. Легко убедиться, что существует много значений x , выводящих нас на этот ответ. В этом примере мы попеременно использовали свойства тригонометрических и показательных функций.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения

$$y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Совершенно ясно, что этот пример можно решить с помощью производной. Дадим еще один метод его решения. Умножая левую и правую части на x^2-x+1 , переносим в левую часть и группируя, получим: $yx^2 - x(y+2) + y + 1 = 0$. Условие неотрицательности дискриминанта приводит нас к неравенству

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

показывая, что оба этих значения достижимы при

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2},$$

получаем ответ: наибольшее значение равно

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ наименьшее равно } -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 6. Доказать, что в произвольном треугольнике наименьшее значение квадрата полупериметра равно $27r^2$, где r — радиус вписанной в данный треугольник окружности.

Для того чтобы решить эту задачу, нам достаточно показать, что в произвольном треугольнике выполнено неравенство: $p^2 \geq 27r^2$, где p — полупериметр. Для решения необходимо вспомнить, какие формулы связывают компоненты доказываемого неравенства. Это формулы площади треугольника:

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника.

Возводя это соотношение в квадрат и сокращая на p , получим: $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$. С другой стороны, среднее арифметическое трех неотрицательных чисел $p-a, p-b, p-c$ не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Раскрывая скобки числителя левой части

$$\geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

и возводя неравенство в куб, получим: $\frac{p^3}{27} \geq (p-a)(p-b)(p-c)$.

Подставляя теперь в правую часть полученного ранее равенства вместо $(p-a)(p-b)(p-c)$ наибольшее значение этого произведе-

ния $\frac{p^3}{27}$, мы увеличиваем правую часть, и, значит, равенство

$$pr^2 \leq \frac{p^3}{27}.$$

Сокращая это неравенство

на p и умножая на 27, мы получим искомое неравенство. Обратим внимание, что равенство будет достигаться тогда, когда равенство достигается в неравенстве о среднем арифметическом и среднем геометрическом, т. е. когда $p-a = p-b = p-c$ или в равностороннем треугольнике.

Пример 7. Длина меньшего основания равнобокой трапеции равна сумме длин ее боковых сторон. Найти наименьшее возможное целое значение k , такое, чтобы площадь полной поверхности фигуры, полученной вращением трапеции вокруг меньшего основания, была в k раз больше площади трапеции.

Введем обозначения: a — боковые стороны, b — нижнее основание, h — высота трапеции. Тогда, в соответствии с условием, верхнее основание равно $2a$, а площадь трапеции: $\frac{2a+b}{2}h$.

Вращая трапецию вокруг нижнего основания, мы получим цилиндрическую поверхность, верхнее и нижнее основания которой представляют собой два равных конуса, образующие которых равны боковой стороне трапеции, а радиус — высоте. Значит, полная поверхность фигуры вращения будет равна $2\pi h(a+b)$, а отношение полной поверхности к площади трапеции: $4\pi \frac{a+b}{2a+b}$.

По условию требуется определить максимально возможное целое значение последней дроби. Казалось бы, что для этого достаточно определить верхнюю границу этой дроби и взять максимальное целое число, не превосходящее эту верхнюю границу. Но это не так. Ведь может оказаться, что на интервале изменения этой дроби вообще не содержится ни одного целого числа. Поэтому надо определять не только верхнюю, но и нижнюю границу подобных выражений. Преобразуем дробь: $4\pi \frac{a+b}{2a+b} =$

$$= 4\pi \left(1 - \frac{1}{2 + \frac{a}{b}} \right).$$

Отсюда видно, что изменение всего выражения определяется лишь отношением $\frac{b}{a}$. Так как b — длина большего

основания, а $2a$ — меньшего, то $b > 2a$ или $\frac{b}{a} > 2$. С другой стороны, величина ломаной, равной сумме длин боковых сторон и верхнего основания, больше нижнего основания: $4a > b$ или $\frac{b}{a} < 4$. Подставляя эти границы имеем, что наша величина изменя-

ется от 3π до $\frac{10}{3}\pi$. На этом интервале находится только одно целое число 10, которое и является ответом.

Пример 8. Доказать, что максимальная полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна $\frac{M^2}{24}$, где M — сумма длин всех ребер параллелепипеда.

Обозначая ребра через a , b и c , надо показать, что:
 $2ab + 2ac + 2bc \leq \frac{4a + 4b + 4c}{24}$. Делая упрощения и перенося все выражения в правую часть, получим очевидное неравенство $(a-b)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 \geq 0$. Обратим внимание на то, что знак равенства имеет место только для куба, а значит, максимум достижим.

Задания для самостоятельной работы к разделу 8

1. Найти наибольшее значение $y = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$.
2. Найти наименьшее значение $y = \frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 1)^2}$.
3. Найти наибольшее значение $y = \sin^3 x - \sin^6 x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения $y = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - \sin^2 x + 5$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения $y = \frac{x-1}{x^2-x+2}$.

6. Натуральные числа a , b , c , взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a , b и c , если известно, что при указанных условиях сумма $a+b+c$ максимальна.

7. Среди всех решений a , b , c , d системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9; \\ c^2 + d^2 = 16; \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$$

найти такие, при которых $b+d$ принимает наименьшее значение.

8. Доказать, что периметр треугольника заключен между суммой отрезков, соединяющих произвольную точку, взятую внутри треугольника с его вершинами и удвоенным значением этой суммы.

9. Доказать, что если площади треугольника и квадрата равны, то периметр треугольника больше периметра квадрата.

10. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая: высота; медиана; биссектриса.

11. В треугольнике ABC длина стороны BC в два раза больше длины стороны AB . Найти наибольшее возможное целое значение k , такое, чтобы площадь полной поверхности фигуры, полу-

ченной вращением треугольника ABC вокруг стороны AC , была в k раз больше площади треугольника, если известно, что угол BAC острый.

12. Доказать, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольшую боковую поверхность имеет тот, у которого осевое сечение есть квадрат.

13. Доказать, что если в данный шар вписан конус наибольшего объема, то радиус шара относится к высоте конуса как 3 : 4.

14. Из квадратного листа жести со стороной $6a$ требуется изготовить коробку без крышки, вырезая по углам квадраты и загибая затем получающиеся выступы так, чтобы коробка была наибольшего объема. Каковы должны быть при этом длины сторон вырезаемых квадратов?

15. В пространстве расположены отрезки AB и CD , не лежащие в одной плоскости. Пусть MN — отрезок, соединяющий их середины. Доказать, что $\frac{AD + BC}{2} > MN$.

9. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Бесспорно, что задачи именно этого раздела вызывают наибольшие трудности на конкурсных экзаменах. Здесь две причины. Первая — недостаточное внимание к этим задачам в школьной программе. Вторая причина более существенна. Она состоит в том, что для успешного решения задач с параметрами надо хорошо знать ту тему, к которой относится конкретная задача. Казалось бы, это очень легко преодолеть. Но дело в том, что в школах, в силу разных причин, гораздо большее внимание уделяется тому как надо решать тот или иной пример, а не тому почему мы решаем именно так. Тем не менее, хорошее знание теории вопроса в сочетании с некоторыми стандартными навыками и методами поможет устранить все трудности в решении задач с параметрами.

Сначала определим сам термин параметр. Анализируя алгебраические задачи, мы можем столкнуться со случаями, когда часть неизвестных фиксирована. Так, например, обстоит дело с общим видом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, в котором значения a , b и c играют принципиально иную роль, чем x . Ведь в каждом конкретном случае мы имеем в виду какие-то конкретные значения a , b и c , в зависимости от которых анализируем поведение трехчлена. Таким образом, *параметрами* называются неизвестные величины, значения которых мы определяем сами в зависимости от условий задачи. При этом в каждом конкретном случае мы должны четко знать, какие величины являются параметрами, а какие — нет. Так например, если в выражении

$15a^3b^2xy^2$ нет ни одного параметра, то оно имеет восьмую степень. А если a и b являются параметрами, а x и y — неизвестными, то выражение будет третьей степени.

В задачах с параметрами могут быть поставлены различные дополнительные условия на параметры, предопределяющие ход решения. Определим лишь один тип условий: решить пример для всех значений параметра — это значит, указать не только все варианты изменений параметра в зависимости от различных решений, но и указать также значения параметра, при которых решением является пустое множество.

Все методы решения задач с параметрами можно условно разбить на две группы: *аналитические*, опирающиеся на свойства входящих в задачу функций, и *графические*, использующие графическую интерпретацию задачи. В последнем случае графики должны быть четко аналитически обоснованы, а окончательное решение — записано аналитически. Рассмотрим, как применяются методы при решении примеров.

Пример 1. Решить уравнение для всех значений параметра a : $|x+3|-a|x-1|=4$.

Применим аналитический метод решения, раскрывая модуль в зависимости от изменения переменной x :

1. При $x < -3$ имеем $-x-3+ax-a-4$ или $(a-1)x=7+a$.

При $a=1$ решений нет, а при $a \neq 1$ значение $x = \frac{7+a}{a-1}$, что должно быть меньше -3 . Это условие выполнено при $|a| < 1$.

2. При $-3 \leq x < 1$ имеем $(a+1)x=a+1$. При $a=-1$ уравнение превращается в тождество, а значит, все значения $-3 \leq x < 1$ являются решениями; при $a \neq -1$ $x=1$. Но это значение не входит в нашу область.

3. При $x \geq 1$ имеем $(1-a)x=1-a$. При $a=1$ уравнение превращается в тождество, а значит, все значения $x \geq 1$ являются решениями; при $a \neq 1$ $x=1$.

Рассмотрев эти случаи, мы получили решения в зависимости от тех или иных областей, в которых лежит значение x , но наша задача дать решения в зависимости от значений параметра a . Для этого удобнее всего поступить следующим образом. На ось параметра a нанести все значения параметра a , которые встретились нам в процессе решения. В данном случае это значения $a=-1$ и $a=1$. Эти два значения разобьют ось параметра a на три интервала. Двигаясь по оси слева направо, надо собрать все случаи, отдельно рассмотрев полученные значения -1 и 1 . В результате получим ответ в зависимости от изменения параметра a :

при $a=-1$ $-3 \leq x < 1$; при $a=1$ $x \geq 1$; при $|a| < 1$ $x=1$ и $x = \frac{7+a}{a-1}$;
при $|a| > 1$ $x=1$.

Пример 2. Существуют ли действительные значения параметра a , для которых: $a^2 - 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}$? И если такие значения существуют, то сколько их? Переносим все в левую часть, получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен: $18 - 8\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$. Легко убедиться в том, что эта величина отрицательна. Поэтому квадратное уравнение не имеет действительных решений. Ответ: не существует действительных значений параметра a , для которых выполнено равенство.

Пример 3. Решить для всех значений a : $ax > \frac{1}{x}$. Подход к решению этого неравенства аналогичен подходу к решению примера 1:

1. При $x < 0$, умножая левую и правую части неравенства на x , имеем: $ax^2 < 1$. Дальнейшее решение зависит от знака параметра a ;

1.1. При $a \leq 0$ неравенство очевидно для всех значений x , для которых оно получено. Значит, в этом случае ответом является $x < 0$;

1.2. При $a > 0$, деля неравенство на a , имеем с учетом всех условий ответ: $-\frac{1}{\sqrt{a}} < x < 0$;

2. При $x > 0$, умножая неравенство на x , имеем: $ax^2 > 1$;

2.1. При $a \leq 0$ неравенство противоречиво;

2.2. При $a > 0$, деля неравенство на a , имеем с учетом всех условий ответ: $x > \frac{1}{\sqrt{a}}$. Объединяя решения всех этих случаев по параметру a , получим окончательный ответ: при $a \leq 0$ $x < 0$; при $a > 0$ $x > \frac{1}{\sqrt{a}}$ или $-\frac{1}{\sqrt{a}} < x < 0$.

Пример 4. Решить для всех значений a : $a^2 - 9^{x+1} - 8a3^x > 0$. Обозначая $3^x = y$, получаем неравенство: $9y^2 + 8ay - a^2 < 0$. Корни квадратного трехчлена, стоящего в левой части, равны $-a$ и $\frac{a}{9}$. В соответствии со свойствами квадратного трехчлена и знаком неравенства переменная должна лежать между этими корнями. Но, во-первых, наша переменная с одной стороны ограничена значением 0, а во-вторых, мы не знаем, какой корень больший, а какой меньший. Поэтому:

1. При $a < 0$ $\frac{a}{9} < y < -a$, но с учетом того, что $y > 0$, получаем $3^x < -a$ или $x < \log_3(-a)$;

2. При $a=0$ решений нет;

3. При $a>0$ $-a < y < \frac{a}{9}$, но с учетом $y>0$: $3^x < \frac{a}{9}$ или $x < \log_3 a - 2$.

Пример 5. Найти все значения $x \geq 0$, для которых при $a \geq 0$, $b \geq 0$ из неравенства: $abx \geq 3a + 4b + x$ следует неравенство $ab \geq 2$.

Из условия сразу же следует, что ни a , ни b не могут быть равны нулю, так как в этом случае второе неравенство будет противоречиво. Значит, $a > 0$, $b > 0$. Но отсюда сразу следует, что $x > 0$, так как если $x = 0$ для положительных a и b противоречивым становится первое неравенство $0 > 3a + 4b$.

Для решения примера используем свойство транзитивности неравенств. Разделим второе неравенство на любой из параметров, например, на a . Оно примет вид $b \geq \frac{2}{a}$. Теперь первое неравенство достаточно привести к виду $b \geq f(a, x)$. Но тогда условие задачи будет выполнено при $f(a, x) \geq \frac{2}{a}$. Действительно, из цепочки

неравенств $b \geq f(a, x) \geq \frac{2}{a}$ и свойства транзитивности будем иметь, что из неравенства $b \geq f(a, x)$ (преобразованное первое неравенство) будет следовать неравенство $b \geq \frac{2}{a}$ (преобразованное

второе неравенство). Сделаем необходимые преобразования. Из первого неравенства следует, что $b(ax - 4) \geq 3a + x$. Очевидно, что скобка, стоящая в левой части, может быть только положительной (в противном случае решений нет). Поэтому $b \geq \frac{3a + x}{ax - 4}$. Эта

дробь и есть функция $f(a, x)$. Значит, должно выполняться неравенство $\frac{3a + x}{ax - 4} \geq \frac{2}{a}$. Или после упрощений $3a^2 - ax + 8 \geq 0$. В соответствии со свойствами квадратного трехчлена для обязательного выполнения последнего неравенства дискриминант должен быть неположителен. Значит, $x^2 - 96 \leq 0$ или с учетом положительности x получаем ответ: $0 < x \leq 4\sqrt{6}$.

Пример 6. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y \geq x^2 + 2a; \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Для решения этой системы достаточно сложить оба неравенства и преобразовать полученное выражение в виде

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} - 4a$. Теперь очевидно, что при $a > \frac{1}{8}$ правая часть отрицательна, и неравенство, а значит, и исходная система не имеют решений. При $a < \frac{1}{8}$ существует бесконечно много решений, удовлетворяющих неравенству и системе. Все эти решения лежат на границах и внутри окружности с центром в точке с координатами $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$ радиусом $\sqrt{\frac{1}{2} - 4a}$. И только при $a = \frac{1}{8}$ неравенство и система имеют единственное решение: $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$.

Пример 7. Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению $2 \log_{3a^2+2}(7 - \sqrt{34+x}) = \log_{2a^2+3}(3-x)$ для любого действительного значения параметра a .

Решение этого примера основано на понимании разницы между необходимым и достаточным условием. Если уравнение должно быть справедливым для любого значения параметра, значит, мы можем подставлять любое удобное для дальнейших упрощений значение параметра a , и уравнение должно иметь такое множество решений, в которое обязательно войдут все решения примера. Но, возможно, в это множество попадут и такие значения x , для которого оно будет справедливым только для подставленных значений параметра. Если множество решений будет не очень большим, то все полученные значения x надо подставить в исходное уравнение и посмотреть, когда оно будет тождеством для любых значений параметра. Если же множество решений будет большим, то надо взять еще одно значение параметра a и проделать то же самое. Ответ задачи теперь попадет в пересечение множеств решений, которое надо подставить в исходное уравнение. Этот метод обычно требует одного или максимум двух шагов. В соответствии с ним мы подставляем в исходное уравнение вместо a^2 единицу, так как в этом случае достигаются наибольшие упрощения: $2 \log_5(7 - \sqrt{34+x}) = \log_5(3-x)$. Решая это уравнение, получаем, что $x_1 = -33$ и $x_2 = 2$. Эти значения x являются необходимыми, так как в противном случае уравнение не выполняется при $a = \pm 1$. Значит, если решение есть, то это одно из двух полученных значений. Проверим каждое из них. При значении $x = -33$ исходное уравнение принимает вид $2 \log_{3a^2+2} 6 = \log_{2a^2+3} 36$, которое не является тождеством при $a = 0$. При $x = 2$ исходное уравнение принимает вид $2 \log_{3a^2+2} 1 = \log_{2a^2+3} 1$, являясь тождеством для любого действительного значения параметра a . Значит, $x = 2$ — ответ примера.

Пример 8. Найти все значения параметров a и b , для которых соотношение $a e^x + b = e^{ax+b}$ выполнено при всех положительных значениях x .

Метод решения этой задачи основан на применении производной и следующем утверждении: из равенства функций следует равенство их производных; обратное верно не всегда. Взяв производную от обеих частей соотношения, получим: $a e^x = a e^{ax+b}$, которое является тождеством в двух случаях. Во-первых, при $a=0$. Во-вторых, при $a \neq 0$ и $x=ax+b$, которое является тождеством при всех значениях x при $a=1$ и $b=0$. Обратим внимание, что эти значения гарантируют нам равенства производных. Будут ли они обеспечивать нам равенство функций? В этом мы можем убедиться лишь непосредственной подстановкой значений параметров в исходное соотношение. Оно также является тождеством, поэтому значения $a=1$; $b=0$ являются одним из ответов.

Вернемся к первому случаю. Подставляя значение $a=0$ в исходное соотношение, получим: $b=e^b$. Все значения параметра b , являющиеся решениями этого уравнения в паре со значением $a=0$, может дать еще один ответ примера. Но как решать это соотношение, ведь в его левой и правой частях стоят функции разных типов? Есть несколько методов анализа таких уравнений. Один из них состоит в исследовании областей изменения левой и правой частей уравнения:

1. При $b \leq 0$ уравнение $b=e^b$ не имеет решений, так как левая его часть неположительна, а правая — положительна, в силу свойств показательной функции;

2. При $0 < b < 1$ уравнение $b=e^b$ также не имеет решений, поскольку левая его часть меньше 1, а правая часть больше 1;

3. При $b \geq 1$ перепишем уравнение в виде $\frac{e^b}{b} = 1$. Покажем, что правая часть уравнения будет всегда больше 1 при $b \geq 1$. Производная от левой части равна $\frac{e^b(b-1)}{b^2}$. Видно, что при $b \geq 1$ эта производная неотрицательна. Значит, левая часть уравнения является монотонно возрастающей функцией. При самом маленьком значении аргумента $b=1$ левая часть равна e и значит, больше 1. При значениях $b > 1$ левая часть будет возрастать, т. е. будет больше 1. Поэтому и в этом случае решений нет. Ответом примера является пара $a=1$; $b=0$.

Пример 9. При каких значениях a уравнение $x - \frac{a}{2} = 2 \left| 2|x| - a^2 \right|$ имеет только три решения? Найти эти решения.

Несмотря на то, что этот пример решило очень малое количество абитуриентов, его решение основано на достаточно простом методе, в основе которого лежит графическая интерпретация. Суть метода состоит в следующем утверждении: уравнение имеет столько решений, сколько раз пересекаются графики левой и пра-

вой частей уравнения. Следовательно, мы должны построить графики левой и правой частей искомого уравнения и найти такие значения параметра a , при которых они пересекаются трижды.

Рассмотрим сначала значение $a=0$. Это диктуется тем, что для построения графика правой части мы должны быть уверены в положительности выражения a^2 . Уравнение примет вид $x=4|x|$. Легко убедиться, что оно имеет единственное решение $x=0$. И поэтому, с точки зрения условия примера, значение $a=0$ нас не устраивает.

При значении $a \neq 0$ график правой части (совокупность участков В, С, Д и Е) приведен на рис. 2. График левой части

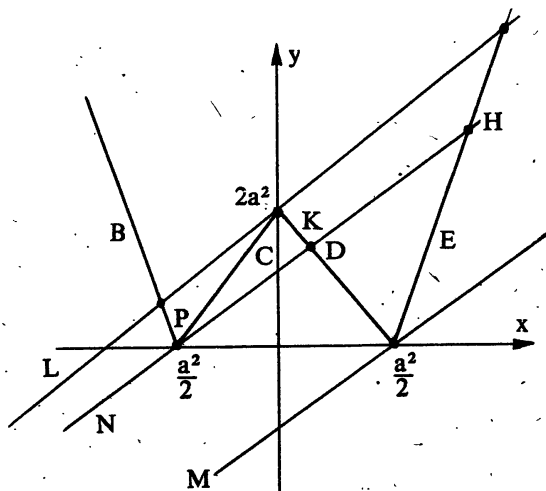


Рис. 2

представляет собой прямую, параллельную прямой $y=x$ и опущенную на $\frac{a}{2}$ по вертикали вниз (при

$a > 0$), или поднятых на $\frac{a}{2}$

вверх (при $a < 0$). В зависимости от a таких прямых будет бесконечно много. Но из них мы должны выбрать только те, которые трижды пересекаются с графиком правой части. Мы не можем перебрать все прямые, но мы можем разбить их на четыре группы, анализи-

руя отдельно каждую из них. Первая группа — все прямые, параллельные $y=x$ и расположенные ниже прямой М. Мы видим, что здесь не имеем ни одного случая пересечения графиков левой и правой частей. Значит, при значении a , большем, чем те, которые определяют прямую М, наше уравнение не имеет решений. Вторая группа — все прямые, расположенные между прямыми М и N. В этом случае мы имеем две точки пересечения: с участками Д и Е, а значит, два решения. Третья группа — все прямые, расположенные между прямыми N и L. В этом случае мы имеем четыре точки пересечения. Четвертая группа — все прямые, расположенные выше прямой L. В этом случае мы имеем две точки пересечения: с участками В и Е. Мы видим, что ни в одном из случаев не получаем три пересечения. Но не были рассмотрены сами прямые М, N и L. Прямые N и L дают нам три точки пересечения, а значит, три решения. Теперь нужно определить соответствующие этим прямым значения параметра и найти сами решения.

Для определения параметра a используем тот факт, что мы знаем координаты точки, через которую проходит прямая N : $-\frac{a^2}{2}, 0$. И если мы подставим координату этой точки в общий вид

прямой, отражающей все прямые левой части $y = x - \frac{a}{2}$, то уравнение обратится в тождество: $0 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}$. Решая это уравнение, находим, что $a = -1$. Подставляя это значение в общий вид левой части, получим, что прямая N имеет вид $y = x + \frac{1}{2}$. Теперь мы должны определить абсциссы точек пересечения этой прямой с правой частью графика, имеющего вид буквы W .

Для прямой N это участки D (точка K), E (точка H) и стык участков B и C (точка P). Двигаясь слева направо, мы сразу получаем, что при $a = -1$ абсцисса точки P равна $-\frac{1}{2}$. Второй корень получается как решение системы уравнений, первое из которых отражает участок D : $y = -4x + 2$, а второе — прямую N : $y = x + \frac{1}{2}$. Решая систему, получим, что второй корень равен $0,3$. Третий корень мы получим, если первое уравнение системы заменим на уравнение участка E . Он будет равен $\frac{5}{6}$. Таким образом, анализируя прямую N мы получили, что при $a = -1$ уравнение имеет три корня: $-0,5; 0,3; \frac{5}{6}$.

Анализируя аналогичным образом прямую L , получим, что при $a = -0,25$ уравнение также имеет три корня: $-\frac{1}{20}; 0; \frac{1}{12}$. Оба этих набора параметра a и значений корней и являются ответом примера.

Пример 10. Найти все значения параметра a , для которых неравенство $\cos^2 x + 2a \sin x - 2a < a^2 - 4$ выполнено для любых действительных значений x .

Решение этого примера также удобно провести, опираясь на графическую интерпретацию и используя свойства квадратного трехчлена. Обозначая $y = \sin x$; $|y| \leq 1$, имеем после преобразования: $y^2 - 2ay + a^2 + 2a - 5 > 0$. Если бы мы имели дело с обычным квадратным трехчленом, то последнее неравенство могло быть справедливо всегда, когда его дискриминант отрицателен. Но в данном случае это утверждение ошибочно, так как мы имеем ограничения на аргумент квадратного трехчлена. А это значит, что верхняя и нижняя границы функции определяются не только

видом функции, но и возможными значениями аргумента. Суть метода решения подобных примеров при ограниченном значении аргумента применительно к данному примеру можно сформулировать так: необходимо и достаточно, чтобы ордината самой нижней возможной точки графика левой части была положительна. В данном случае мы имеем дело с параболой, ветви которой направлены вверх. Но самая нижняя точка ее графика не обязательно вершина параболы. Ведь ее абсцисса может и не лежать в области значений — на отрезке от -1 до 1 . Для определения самой нижней возможной точки графика рассмотрим три возможных случая в зависимости от абсциссы вершины параболы, которая в данном случае равна a .

1. При смещении вершины влево от точки с абсциссой, равной -1 , самая нижняя точка графика имеет абсциссу -1 . А значит, значение левой части неравенства при $y = -1$ должно быть положительно. Или при $y_0 = a \leq -1$ необходимо и достаточно, чтобы $a^2 + 4a - 4 > 0$. Решая, имеем: $a < -2 - \sqrt{8}$.

2. При вершине параболы, лежащей на интервале от -1 до 1 , необходимо и достаточно, чтобы значение параболы в вершине было положительно. Или при значении $y = a$ левая часть трехчлена должна быть положительна: $a^2 - 2a^2 + a^2 + 2a - 5 > 0$. После упрощений получим $a > 2,5$; что противоречит тому, что значение a должно лежать на интервале от -1 до 1 . Значит, в этом случае решений нет.

3. При смещении вершины вправо от точки с абсциссой 1 самая нижняя точка графика имеет абсциссу 1 . Значит, значение левой части неравенства при $y = 1$ должно быть положительно. Или при $y_0 = a \geq 1$ необходимо и достаточно, чтобы $a^2 - 4 > 0$. Решая, имеем: $a > 2$. Так как второе решение последнего неравенства: $a < -2$ не удовлетворяет условию $a \geq 1$.

Итак, ответом примера будут две области: $a < -2 - \sqrt{8}$ или $a > 2$.

Прежде чем идти дальше, советуем читателю еще раз внимательно просмотреть все предыдущие разделы, обращая особое внимание на качественные основы материала и на разобранные в этих разделах задачи с параметрами, методы решения которых дополняют методы раздела 9.

Задачи для самостоятельной работы к разделу 9

1. Решить уравнение

$$a|x+3| + 2|x+4| = 2$$

для всех значений параметра a .

2. Существуют ли действительные значения параметра a , для которых:

$$\sqrt{6}a^2 + 2a\sqrt{3} + 3 = -2a?$$

3. Найти все значения параметров a и b , для которых система

$$\begin{cases} 8x + (a^2 + ab + b^2)y = 4; \\ (a-b)x + 26y = 2 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$(a-x)^2(a+x-2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

5. Найти все значения параметра b , при которых совместна система:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = b^4 - 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85}; \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4. \end{cases}$$

6. Найти все значения параметра a , при которых система:

$$\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0; \\ x(y+1-a) + y(2a-3) + a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. При каких значениях a уравнение

$$x - \frac{a}{2} = 4 \left| |x| - a^2 \right|$$

имеет ровно три решения? Найти эти решения.

8. Найти все значения a , для которых корни уравнения

$$x^2 + x + a = 0$$

больше, чем a .

9. При каких значениях a уравнение

$$x|x+2a|+1-a=0$$

имеет единственное решение?

10. Найти значения b , для которых корни уравнения

$$x^2 - 2bx - 1 = 0$$

действительны и не превосходят по модулю 2.

11. При каких значениях a система:

$$\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x; \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

12. При каких значениях a система совместна:

$$\begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \geq \frac{3a+1}{a+2}; \\ 3x^2 + xy + y^2 \leq 1? \end{cases}$$

13. Найти все значения a , при которых неравенство

$$x^2 < 4 - |x + a|$$

имело бы хотя бы одно отрицательное решение.

14. При каких значениях a уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет два различных решения?

15. Найти все значения a , для которых неравенство $9x^2 - x + \frac{1}{36} \geq y - 9y^2 - axy$ выполняется для любых x и y таких, что $|x| = |y|$.

16. Найти все значения $x \geq 0$, для которых при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ из неравенства $abx \geq 5a + 4b + x$ следует неравенство $ab \geq 3$.

17. При каких значениях a уравнение $\cos x + 4 \sin ax = 5$ имеет решения?

18. При всех значениях a решить $25^x + a^2(a-1)5^x - a^5 = 0$.

19. При каких значениях a неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a \cos x > 2$ выполнено для всех действительных x ?

20. Найти все значения a , для которых существует хотя бы одна пара действительных значений x и y таких, чтобы:

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 < 1; \\ y = ax^2. \end{cases}$$

21. При всех значениях a решить: $\sqrt{x - \sqrt{3}} + a^2 x^2 + 2ax(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 6\sqrt{2} - 9$.

22. При всех значениях a решить: $a^2 - 2 \cdot 4^{x+2} - a \cdot 2^{x+1} > 0$.

23. Найти все значения a , при которых область значений функции

$$y = \frac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок от 1 до 2?

24. Решить для всех значений a : $\log_{|\sin x|} 2 \log_{\sin^2 x} 3 = a$.

25. Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению $\log_{x+a^2+1}(a^2 x + 2) = 2 \log_{7+2x}(5 - \sqrt{6-2x})$ при любом действительном a .

26. При каких значениях параметра p уравнение $(x-p)^2(p(x-p)^2 - p - 1) = -1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

27. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (a-2) \sin x + \cos y = 1; \\ \log_a(2 \cos y) = (\log_a z) \log_z(1 + 7 \sin x); \\ \log_z\left(\frac{a}{5-a}\right) = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение относительно x , y и z . При каждом таком значении a найти все решения.

28. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{1/3}(2|x-a| + 2) = 0$ имеет три решения.

29. При каких значениях $a \geq 1$ больший из корней уравнения $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ принимает максимальное значение?

30. Найти все значения a , для которых уравнение $\sqrt{a} + \sqrt{a + \sin x} = \sin x$ имеет решения.

31. При каких значениях a только одно решение неравенства $\sqrt{(a+3)(a^2+a-6)} x^3 - \sqrt{a^4+a^3-6a^2} x^2 + \sqrt{a^3+3a^2} x - a^2 \leq 0$ удовлетворяет условию $1 \leq x \leq 4+a$.

32. Для каждого a решить: $4 \cos x \sin a + 2 \sin x \cos a - 3 \cos a = 2\sqrt{7}$.

33. Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 - 5a; \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

34. Найти все значения a , при которых любой корень уравнения $a(2a-1) \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$ является корнем уравнения $\log_{1/2}(3 \operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3 \operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$ и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого.

10. ВАРИАНТЫ КОНКУРСНЫХ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ

Этот раздел, с одной стороны, является итоговым и позволит читателю проверить самого себя на степень усвоения всех предыдущих разделов и программы по элементарной математике в целом. С другой стороны, предложенные в этом разделе варианты письменных работ дают достаточно полное представление

о типах конкурсных задач, предлагавшихся в 1965—1990 годах на экзаменах.

Первый из представленных вариантов дается с решением, а ко всем остальным даны ответы. Выбирая вариант, который следует разобрать, автор исходил из того, что требуется учесть интересы максимально широкого круга читателей. А, это значит, что вариант должен быть не слишком сложным, но и не слишком простым. Исходя из этого разберем вариант, который предлагался на вступительных экзаменах на экономический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова (самый большой конкурс среди всех факультетов; где сдают экзамен по математике) в 1990 году. На решение этого отводилось четыре астрономических часа.

ВАРИАНТ 1

1. Имеют ли общие точки область значений функции $y = \sqrt{3 + 2\sqrt{2x - 2x^2}}$ и промежутки $[\log_3 15, +\infty]$? Ответ обосновать.

2. Решить уравнение $\sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1|$.

3. На гипотенузе KM прямоугольного треугольника KLM расположен центр O окружности, которая касается катетов KL и LM в точках A и B соответственно. Найти длину отрезка AK , если известно, что $BM = 23/16$, $AK:AC = 5:23$, где C — точка пересечения окружности с KM , лежащая между точками O и M .

4. Натуральные числа a, b, c , взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a, b и c , если известно, что при указанных условиях сумма $a + b + c$ максимальна.

5. Найти все корни уравнения $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2\pi x)} \cos(\pi x) + \sin(\pi x) = \sqrt{2}$, расположенные на отрезке от -3 до 1 .

6. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Дадим небольшой тактический совет. Порядок решения задач письменного экзамена произвольный, поэтому, в целях рационального распределения времени, следует сначала решать те задачи, которые для вас наиболее доступны. Полностью решив их на черновике, следует внимательно проверить и переписать их на чистовик и лишь после этого приступить к решению более трудных задач.

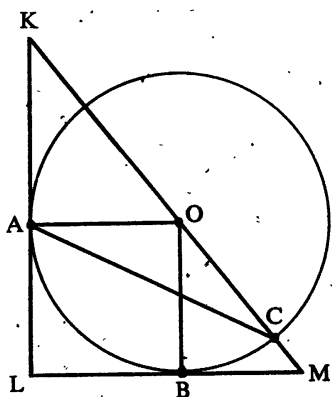
1. Для того чтобы решить первую задачу, следует сравнить наибольшее значение области значений данной функции с левой границей промежутка: $\log_3 15$. Функция представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Так как никаких ограничений на аргумент нет, то максимальное значение функции достигается в вершине параболы. Абсцисса вершины $x_0 = \sqrt{2}/2$. Подставляя это значение в правую часть, получим $y_0 = \sqrt{3} + 1$. Это и есть наибольшее значение области значений функции, которое надо сравнить с $\log_3 15$: $\sqrt{3} + 1$ или $\log_3 15$. Переносим 1 в правую часть и применяя формулу $\log_3 15 - 1 = \log_3 15 - \log_3 3 = \log_3 5$, получим для сравнения $\sqrt{3}$ и $\log_3 5$. Учитывая, что $3^{\sqrt{3}} > 3^{3/2} > 5$, находим, что $3^{\sqrt{3}} > 5$, или $\sqrt{3} > \log_3 5$, или $\sqrt{3} + 1 > \log_3 15$. Это неравенство означает, что наибольшее значение данной функции больше, чем левая граница промежутка, а, значит, существует пересечение этих множеств. Ответ: область значений данной функции и заданный промежуток имеют общие точки.

2. Это уравнение вида (6), поэтому единственное условие возведения в квадрат — неотрицательность правой части. Но правая часть представляет собой сумму неотрицательного модуля и положительной константы. Значит, правая часть положительна и можно возводить обе части уравнения в квадрат на всей области действительных чисел. После возведения в квадрат, переноса всех величин в левую часть и приведения подобных членов, имеем $|16x^2 - 25| - 32|x + 1| - 16x^2 - 32x - 7 = 0$. Это уравнение проще всего решать «методом интервалов»: подмодульные выражения обращаются в ноль в точках $+1,25$; -1 ; наносим эти точки в порядке их возрастания на числовую прямую; три точки разобьют числовую прямую на четыре интервала, внутри каждого из которых подмодульные выражения знакпостоянны (так как они могут менять знак только при переходе через нулевое значение подмодульного выражения). Рассмотрим значение уравнения внутри каждого из этих интервалов (при этом знак нестрогого неравенства обычно ставится на одной из конечных границ интервала):

- 1) при $x < -1,25$ уравнение после упрощений примет вид $0 = 0$. Это означает, что все $x < -1,25$ являются решениями уравнения;
- 2) при $-1,25 \leq x < -1$ уравнение после упрощений примет вид $32x^2 = 50$ или $x = \pm 1,25$. Случаю 2 удовлетворяет меньшее из этих значений;
- 3) при $-1 \leq x \leq 1,25$ уравнение после упрощений примет вид $16x^2 + 32x + 7 = 0$, корни которого равны $-1,75$; $-0,25$. Случаю 3 удовлетворяет больший корень;
- 4) при $x \geq 1,25$ уравнение после упрощений примет вид $64x = -64$, или $x = -1$. Это значение не удовлетворяет случаю 4 и не является корнем искомого уравнения.

Объединяя все четыре случая, получаем, что ответом уравнения являются значения: $x \leq -1,25$; $x = -0,25$.

3. Общий подход к решению геометрических задач состоит в логическом движении от тех величин, которые требуется определить, к условиям задачи.



Из условия следует, что $AK = \frac{5}{23} AC$.

Обозначим угол OAC через α . Тогда учитывая, что треугольник AOC равнобедренный, угол OCA также равен α , а угол AOC равен $\pi - 2\alpha$;

угол CAK равен $\frac{\pi}{2} + \alpha$, а угол AOK ,

являясь внешним углом треугольника AOC , равен 2α . Из треугольника

AOK угол AKO равен $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$, и этой

же величине, как соответственный угол при параллельных прямых, равен угол BOM . Из треугольника

BOM имеем, что $OB = BM \operatorname{tg} 2\alpha$. Так как AO и OB — радиусы окружности, они равны между собой. Значит, $AO = BM \operatorname{tg} 2\alpha$. Применяя в треугольнике AOC теорему синусов, получим $AC = 2 AO \cos \alpha = 2 BM \operatorname{tg} 2\alpha \cos \alpha$. Теперь наша задача определить какую-либо тригонометрическую функцию угла α . Это легко сделать, если, рассматривая треугольник AKC , мы запишем теорему синусов для сторон AK и AC и получим, что $\sin \alpha = 1/5$. Зная из условия BM , находим ответ $AK = 6/25$.

4. Обозначим первый член геометрической прогрессии a через x , а знаменатель прогрессии через k . Тогда $b = xk$, $c = xk^2$. Максимальное значение суммы $a + b + c$ будет достигаться тогда, когда мы найдем максимально возможные делители чисел 2240 и 4312, равные xk и xk^2 соответственно. Раскладывая на множители, получим $4312 = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ и $2240 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7$. Из разложения 2240 видно, что знаменатель прогрессии не может равняться 5, так как этот множитель отсутствует в разложении числа 4312. Максимально возможное значение второго члена прогрессии равно $2^3 \cdot 7$, а, значит, знаменатель прогрессии равен 7. Первый член прогрессии равен $2^3 \cdot 7 : 7 = 8$. Ответом задачи являются числа: 8, 56, 392.

5. Применяя в левой части уравнения формулу (12), будем иметь $\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2\pi x)} \sin(\pi x) + \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2\pi x)}) = \sqrt{2}$. Это равенство возможно только тогда, когда $\operatorname{ctg}^2(2\pi x) = 0$, так как в противном случае первый множитель в левой части будет меньше $\sqrt{2}$, а, значит, для сохранения равенства синус должен

быть строго больше 1, что невозможно. Следовательно, мы имеем систему условий: $\operatorname{ctg}^2(2\pi x) = 0$ и $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, решая которую, получим $x = \frac{1}{4} + 2n$, где n — целое число. С учетом того, что решение должно находиться на отрезке от -3 до 1 , получаем, что нас устраивает только два значения n : -1 и 0 , а, значит, окончательный ответ задачи: $-\frac{7}{4}$ и $\frac{1}{4}$.

6. Обратим внимание на то, что сумма двух показательных выражений в левой части первого уравнения системы — это сумма двух взаимно обратных чисел. Значит, все функции, включающие переменную y в первом и втором уравнениях системы, четные. Действительно, замена y на $(-y)$ в первом уравнении меняет местами взаимно обратные числа, не изменяя значения их суммы; во втором замена y на $(-y)$ также ничего не меняет. Это означает, что если наша система имеет какое-либо решение y_0 , то она обязательно имеет решение $(-y_0)$. Требование единственности решения приводит нас к тому, что эти решения должны совпадать. Из равенства $y_0 = -y_0$ следует, что $y_0 = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнение системы, получим

$$\begin{cases} 2 - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \end{cases}$$

которая распадается на совокупность трех условий (при рассмотрении второго уравнения): или $x = 0$, или $a = 2$, или $a = 3$. Подставляя все эти значения в первое уравнение системы, получаем окончательный ответ: $a = -1$ или $a = 2$.

При самостоятельном решении следующих вариантов надо иметь в виду, что если не указан год или учебное заведение, то вариант либо запасной, либо предлагался на экзаменах до 1965 года.

ВАРИАНТ 2

1. Решить неравенство: $\log_{x^2}(x^2 - 4x + 3) > 1$.
2. Найти все значения k , для которых один из корней уравнения $2kx^2 - 2x - 3k - 2 = 0$ больше 1, а другой меньше 1.
3. Грузовик должен был пройти из A в B со скоростью 64 км/ч. В течение 3 ч он ехал с этой скоростью. После 3 ч пути вследствие снежного заноса он простоял 50 мин и затем отправился по другой дороге, в результате чего путь удлинился на 31 км. С другой стороны, скорость его на этом участке увеличилась на 6 км/ч. Опоздание составило 1 ч 5 мин. Найти расстояние от A до B .

4. Решить систему $\sin x + \sin y = \sqrt{2}$, $2 \cos x \cos y = 1$.

5. В треугольнике ABC известно, что угол $A = 60^\circ$, а стороны AC и AB связаны соотношением $AC = (2 + \sqrt{3}) AB$. Найти углы B и C треугольника.

Ответы: 1. $\frac{3}{4} < x < 1$; $x < -1$. 2. $\frac{5 - \sqrt{41}}{4} < k < \frac{5 + \sqrt{41}}{4}$; $k \neq 0$.

3. $AB = 336$ км. 4. $x = y = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi$. 5. $C = 15^\circ$;
 $B = 105^\circ$.

ВАРИАНТ 3

1. Доказать, что $\sin^4 x - 6 \sin^2 x + 8 > 0$ при всех x .

2. Велосипедист отправился с некоторой скоростью из города A в город B , отстоящий от A на 60 км. Затем он выехал обратно из B в A с той же скоростью, но через час после выезда сделал остановку на 20 мин. После этого он продолжил путь, увеличив скорость на 4 км/ч. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он затратил столько же времени, сколько на путь от A до B .

3. Пусть x_1 и x_2 — острые положительные углы, удовлетворяющие уравнению: $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 x - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$. Найти $x_1 + x_2$.

4. Решить уравнение для всех положительных значений параметра a : $\sin^4 x + \cos^4 x = a \sin 2x + \frac{a}{2}$.

Ответы: 2. 20 км/ч. 3. $\pi/3$. 4. Если $0 < a < 1/3$, решений нет; если $a \geq 1/3$, то $x = \frac{1}{2} \left((-1)^k \arcsin(-a + \sqrt{a^2 - a + 2}) + \pi k \right)$.

ВАРИАНТ 4

1. При каких значениях параметра a корни уравнения $4x^2 - \frac{8}{3^a}x + \frac{6}{3^a} - 3 = 0$ действительны и оба меньше 2?

2. Несколько человек должны были поровну уплатить сумму 10800 руб. Но эту сумму уплатили не все, а на два человека меньше и потому доля каждого увеличилась на 900 руб. Сколько человек фактически участвовало в платеже?

3. Решить уравнение $\log_{\sin x}(\cos x) \log_{\sin^2 x}(\sin x \cos x) = 1$.

4. Из точки вне окружности радиуса r проведены под углом α две секущие, отстоящие от центра на одинаковом расстоянии a . Определить площадь трапеции, боковыми сторонами которой служат внутренние части секущих.

5. Решить неравенство при всех $a > 0$ и $a \neq 1$:

$$\frac{2}{2a^x - 1} > a^{2x} - \frac{5}{2}a^x - 2.$$

Ответы: 1. $a > \log_3 \frac{10}{13}$. 2. 4 человека. 3. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$.

4. $4a\sqrt{r^2 - a^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 5. При $0 < a < 1$

$x < -\log_a 2$ или $x > \log_a \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right)$; при $a > 1$

$-\log_a 2 < x < \log_a \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right).$

ВАРИАНТ 5

1. Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записанное теми же цифрами, что искомое, но в обратном порядке.

2. Показать, что единственным решением системы $2x + y + z = 0$, $yz + zx + xy - y^2 = 0$, $xy + z^2 = 0$ является решение $x = y = z = 0$.

3. Решить уравнение $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

4. Решить систему $\log_y x - \log_x y = 8/3$, $x/y = 16$.

5. Доказать, что можно найти такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1 и каждый следующий член в a раз больше суммы всех следующих за ним членов. При каком значении a задача имеет решение?

6. Найти отношение площади треугольника к площади другого треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.

Ответы: 1. 3762. 3. $3/2$. 4. $x = 64$, $y = 4$, $x = 2$, $y = 1/8$.

5. Первый член прогрессии равен 1, знаменатель $\frac{1}{1+a}$. Задача разрешима при $a < -2$ или $a > 0$.

6. 4:3.

ВАРИАНТ 6

1. Экзаменационную работу писало 100 человек. Им было роздано 480 листов бумаги, причем каждая девочка получила на 2 листа больше, чем каждый мальчик, а все мальчики получили столько же листов бумаги, сколько все девочки. Сколько было мальчиков и сколько девочек?

2. Решить систему $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$.

3. Решить неравенство для всех $a > 1$: $\log_a x + \log_a (x+1) < \log_a (2x+6)$.

4. Доказать, что из равенства $\cos z = \cos x \cos y$ вытекает равенство $\operatorname{tg} \frac{z+x}{2} \operatorname{tg} \frac{z-x}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}$.

5. В треугольник со сторонами a , b и c вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне c . Найти радиус полукруга.

Ответы: 1. 60 мальчиков, 40 девочек. 2. a , 0, 0; 0, a , 0;

0, 0, a . 3. $0 < x < 3$. 5. $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)p}{a+b}$, где

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

ВАРИАНТ 7

1. Бак объемом 425 м³ наполнялся водой из двух кранов, причем первый кран был открыт на 5 ч дольше второго. Сколько времени был открыт второй кран, если известно: во-первых, что, если первый кран был бы открыт столько времени, сколько на самом деле был открыт второй, а второй кран был бы открыт столько времени, сколько был открыт первый, то из первого крана вытекло бы вдвое меньше воды, чем из второго; во-вторых, если одновременно открыть оба крана, то бак наполнится за 17 ч.

2. Решить систему: $\log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7$, $x^y = 5^{12}$.

3. Решить уравнение $(\sqrt[3]{x} - 4,5)^4 + (\sqrt[3]{x} - 5,5)^4 = 1$.

4. Доказать, что если x удовлетворяет соотношению $\frac{\cos x - \cos a}{\cos x - \cos b} = \frac{\sin^2 a \cos b}{\sin^2 b \cos a}$, то $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}$.

5. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти треугольник с наибольшим периметром.

Ответы: 1. 15 ч. 2. 125; 4 и 625; 3. 1331/8 и 729/8.
5. Равнобедренный треугольник.

ВАРИАНТ 8

1. В двух одинаковых сосудах объёмом по 30 л каждый содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

2. Решить уравнение $\log_x 2 \log_{x/16} 2 = \log_{x/64} 2$.

3. Решить систему $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3$; $x - y = \frac{7}{2}(\sqrt[3]{x^2 y} - \sqrt[3]{xy^2})$.

4. Решить уравнение $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0$.

5. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20° . Доказать, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Ответы: 1. 20 л и 10 л. 2. 4; 8. 3. 216; 27 и -27; -216.

4. $\frac{1}{4}(\pi + 2k\pi)$.

ВАРИАНТ 9

1. Шестизначное число начинается цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохраняя порядок остальных цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

2. Решить систему $(x+y)(x^2-y^2)=9$, $(x-y)(x^2+y^2)=5$.

3. Решить уравнение: $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$.

4. Решить при всех $a > 1$: $x^{\log_a x + 1} > a^2 x$.

5. Плоты шли из пункта A до устья реки вниз по течению. У устья их взял на буксир пароход и через $17 \frac{1}{8}$ суток после выхода плотов из A доставил по озеру в пункт B . Сколько времени пароход вел плоты от устья реки по озеру до пункта B , если известно, что пароход тратит на рейс без буксировки от A до B 61 ч и от B до A — 79 ч, а его скорость во время буксировки уменьшается вдвое.

Ответы: 1. 142857. 2. 2; 1 и -1; -2. 3. 1; 2.

4. $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$, $x > a^{\sqrt{2}}$. 5. 20 ч.

ВАРИАНТ 10

1. Показать, что уравнение $\log_{(2x)} \frac{2}{x} \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$ имеет лишь один корень, удовлетворяющий неравенству $x > 1$, и найти этот корень.

2. Найти все значения a , при которых два уравнения: $ax^2 - x - a - 1 = 0$ и $ax^3 - x^2 - x - a - 1 = 0$ имеют общий корень. Найти этот корень.

3. Решить уравнение $x^2 + 4x \cos(xy) + 4 = 0$.

4. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{n}$ -ю часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на a процентов. Определить исходное процентное содержание соли.

5. Решить уравнение $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 3x + 5$.

Ответы: 1. 2. При $a=0$ общих корней нет, при $a \neq 0$

общий корень равен $\frac{1+a}{a}$. 3. $-2; k\pi$ и $2; \frac{\pi}{2} + k\pi$.

4. $a\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$. 5. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

ВАРИАНТ 11

1. Рассматривается дробь — отношение двух целых чисел, знаменатель которой меньше квадрата числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше, чем $1/3$, если же от числителя и знаменателя отнять по 3, то дробь останется положительной, но будет меньше 0,1. Найти эту дробь.

2. Решить систему $x^3 + y^3 = 1$, $x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 20° . На боковых сторонах AB и CB взяты соответственно точки E и P так, что угол ECA равен 60° , а угол PAC равен 50° . Доказать, что угол EPA равен 80° .

4. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CE , не лежащие в одной плоскости. Пусть PK — отрезок, соединяющий их середины. Доказать, что $\frac{AC + BE}{2} > PK$.

5. При каких a система $-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ справедлива для всех x ?

Ответы: 1. $4/15$. 2. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$. 5. $-1 \leq a < 2$.

ВАРИАНТ 12

1. Решить уравнение $\sqrt{y-2} + \sqrt{2y-5} + \sqrt{y+2} + 3\sqrt{2y-5} = 7\sqrt{2}$.

2. Решить уравнение $\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a}$.

3. Отец предполагал распределить некоторую сумму денег между своими тремя сыновьями в отношении 7:6:5. Затем он изменил свое решение и эту же сумму разделил в отношении 6:5:4. Кто из сыновей получит больше в результате второго деления? Кто меньше? Известно, что один из сыновей в результате второго деления получил на 12 руб. больше другого. Сколько получил каждый?

4. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}$.

5. Найти сторону квадрата, вписанного в сегмент, дуга которого равна α , а хорда a .

Ответы: 1. 15. 2. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. 3. Первый сын больше,

второй — столько же, третий — меньше; 72 руб., 60 руб., 48 руб. или 36 руб., 30 руб., 24 руб.

4. $0; \pm 1; \pm \sqrt{1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}}$. 5. $\frac{\sqrt{4 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \cos \frac{\alpha}{2}}{5 \sin \frac{\alpha}{2}} a$.

ВАРИАНТ 13

1. Решить уравнение: $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

2. Решить систему $x + y + z = 9$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $xy + xz + yz = 27$.

3. Велосипедист выехал из пункта A в пункт B и ехал с постоянной скоростью 20 км/ч. Когда он проехал $8\frac{1}{3}$ км, его догнал автомобиль, вышедший из A на 15 мин позже и шедший тоже с постоянной скоростью. После того как велосипедист проехал еще 25 км, он встретил автомобиль, уже возвращавшийся из пункта B , где он простоял полчаса. Найти расстояние от A до B .

4. Найти сторону a треугольника и его площадь S , если известны его углы A и B и полупериметр p .

5. Найти значение параметра, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 1, \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти соответствующие решения.

Ответы: 1. $\pm \frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{4}) + k\pi$. 2. 3; 3; 3. $\frac{475}{12}$ км.

$$4. a = \frac{2p \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{B}{2} \sin(A+B)}, S = 2p^2 \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}}{\sin(A+B)}$$

5. При $a = -1$ $x = 0$, $y = -1$; при $a = 3$ $x = -2$, $y = 1$.

ВАРИАНТ 14

1. Решить уравнение $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2$.

2. Найти все значения x , для которых $\log_3 \log_{1/2}(x^2 - x - 1)$ есть действительное число.

3. В два сосуда A и B налита вода, причем масса сосуда A с водой составляет $\frac{4}{5}$ массы сосуда B с водой. Если содержимое сосуда B перелить в сосуд A , то масса последнего с водой превзойдет массу сосуда B в 8 раз. Найти массу каждого сосуда и количество воды в каждом из них, зная, что в сосуде B содержится на 50 г больше воды, чем в сосуде A .

4. В треугольнике ABC дана длина a стороны BC и угол A . Найти длины других сторон b и c , если известно, что $c = 2b$. Исследовать, при каких BC и A задача имеет решение.

Ответы: 1. Нет решений. 2. $-1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$.

3. В сосуде A 150 г воды, B — 200 г воды.

$$4. \frac{a}{\sqrt{5-4\cos A}}; \frac{2a}{\sqrt{5-4\cos A}}, a > 0; 0 < A < 180^\circ.$$

ВАРИАНТ 15

1. Двое рабочих затрачивают на выполнение некоторой работы 25 ч, причем первую половину работы сначала выполняет первый рабочий, а затем вторую половину работы выполняет второй рабочий. Если же они будут работать вместе, то они затратят на эту же работу 12 ч. За сколько часов каждый из них в отдельности может выполнить всю эту работу.

2. Решить систему $x + y = 75^\circ$, $\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}$.

3. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 7, а сумма их квадратов равна 21.

4. Углы треугольника равны A , B и C . Определить как относятся между собой объемы тел вращения, полученных при вращении этого треугольника последовательно вокруг его сторон.

Ответы: 1. 20 ч, 30 ч. 2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $y = \frac{\pi}{6} - k\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$,

$$y = \frac{\pi}{4} - k\pi. \quad 3. 1; 2; 4 \text{ и } 4; 2; 1.$$

$$4. \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}.$$

ВАРИАНТ 16

1. Решить уравнение $\sin x + \sin 9x = 2$.

2. Найти все значения x ; для которых $\log_x(2x) > \log_{2x} x$.

3. Дано квадратное уравнение $x^2 - 2(k-1)x + 2k + 1 = 0$, где $k < 0$. Доказать, что корни этого уравнения действительны, и исследовать их знак в зависимости от значений $k < 0$.

4. Стороны треугольника связаны соотношением $a^2 = c(b+c)$. Доказать, что угол A вдвое больше угла C .

Ответы: 1. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. 2. $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x > 1$. 3. При $k < -\frac{1}{2}$

корни разных знаков; при $k = -\frac{1}{2}$ корни равны

0 и -3 ; при $-\frac{1}{2} < k < 0$ оба корня отрицательны.

ВАРИАНТ 17

1. Решить уравнение $\cos(\pi\sqrt{x})\cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1$.

2. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно — первый из пункта A в пункт B , второй — из B в A . Через 3 ч после отправления они встречаются в пункте M , отстоящем от A на четверть расстояния AB . Зная, что скорость велосипедиста на 10 км/ч больше скорости пешехода, определить скорости пешехода и велосипедиста и расстояние AB .

3. Решить уравнение $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$.

4. Вне окружности радиуса $r = 5$ взята точка O и через нее проведена секущая OAB , причем $OA = 2$, $OB = 8$. Вычислить угол, который образует эта секущая с касательной, проведенной из

точки O к данной окружности; берется та касательная OC , для которой центр окружности лежит внутри угла COA .

Ответы: 1. $x=4$. 2. $AB=60$ км, скорость пешехода 5 км/ч, велосипедиста — 15 км/ч. 3. 1 и -1 . 4. 90° .

ВАРИАНТ 18

1. Смешали некоторое количество руды, содержащей 72% железа, с некоторым количеством руды, содержащей 58% железа, и получили руду, содержащую 62% железа. Если бы для смеси взяли каждой руды на 15 кг больше, то получили бы руду, содержащую 63,25% железа. Определить массу каждой из взятой для смеси руд.

2. Сколько корней имеет уравнение $\cos x + \cos \frac{x}{17} + \cos \frac{x}{5} = 3$ на интервале от 0 до 10000?

3. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии с положительными членами. Первые и вторые члены этих прогрессий совпадают. Доказать, что всякий другой член арифметической прогрессии не больше соответствующего члена геометрической прогрессии.

4. ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A . Около него описана окружность, радиус которой R . Вычислить катеты AB и AC , зная, что при вращении этого треугольника вокруг касательной, проведенной вокруг описанной окружности в точке A , получается тело, объем которого равен $\frac{2}{3}\pi R^3$.

Ответы: 1. 12 кг и 30 кг. 2. $170k\pi$, 18 корней.

$$4. \frac{1}{2}R(\sqrt{6} \pm \sqrt{2}).$$

ВАРИАНТ 19

1. Доказать, что $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7} = 2$.

2. Решить систему $\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 6$, $x + y = 9$.

3. Лодка спускается вниз по течению на расстояние $28\frac{1}{2}$ км, затем поднимается на $22\frac{1}{2}$ км. Вся поездка продолжается 8 ч. Какова собственная скорость лодки, если известно, что скорость течения равна $2\frac{1}{2}$ км/ч.

4. Решить неравенство $\log_a(\cos x + \frac{1}{2}\sin x) < 0$ для всех значений параметра a .

5. Три числа, образующие арифметическую прогрессию, в сумме составляют 24. Если большее из чисел увеличить на 4, то эти числа будут составлять геометрическую прогрессию. Определить эти прогрессии.

Ответы: 2. 8; 1 и 1; 8. 3. 7 км/ч.

$$4. \quad \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} - \arctg 2 + 2k\pi < x < \pi - \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} - \arctg 2 + 2k\pi. \quad 5. 4; 8; 12 \text{ и } 12; 8; 4.$$

ВАРИАНТ 20

1. Два конькобежца выбегают одновременно: первый из пункта A в пункт B , второй из B в A и встречаются на расстоянии 300 м от A . Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них поворачивает назад и встречается другого на расстоянии 400 м от B . Найти длину дорожки AB .

2. При $b > 0$ и $b \neq 1$ найти все корни уравнения $\sin(2b^x) + \sin(3b^x) = \sin(5b^x)$.

3. Решить уравнение $x - 2\sqrt{x}\sqrt{x-1} + 2 + 2 = 0$.

4. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 192 см²; если уменьшить каждое из ребер на 1 см, то полная поверхность уменьшится на 70 см². Найти длину диагонали параллелепипеда.

5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sin^2 x + 4 \sin x + a = 0$ имеет решения. Найти все эти решения в зависимости от параметра a .

Ответы: 1. 500 м. 2. $\log_b \frac{2k\pi}{5}, \log_b \frac{2k\pi}{3}, \log_b k\pi$. 3. 2.

4. 13. 5. При $-5 \leq a \leq 3$ $x = (-1)^n \arcsin(-2 + \sqrt{4-a}) + k\pi$, при других значениях параметра a решений нет.

ВАРИАНТ 21

1. По окружности длиной 720 см движутся равномерно с одинаковой скоростью и в одном и том же направлении несколько точек, находящихся на одинаковом расстоянии одна от другой. Наблюдатель, стоящий у окружности, отмечает, что промежуток времени между прохождением мимо наблюдателя двух соседних точек равен 10 с. Если бы точек было на две больше, а скорость каждой из них на 6 см/с меньше, то мимо наблюдателя они проходили бы через тот же промежуток времени. Сколько точек находится в движении и какова их скорость?

2. Решить систему $10^{2-\lg(x-y)}=25$; $\lg(x-y)-2\lg 2=1-\lg(b+y)$.

3. При каком значении параметра a уравнения $2x^2-(3a+2)x+12=0$ и $4x^2-(9a-2)x+36=0$ имеют общий корень?

4. В треугольнике ABC известны: $BC=14$, $AC+AB=28$, $EK=12$, где EK — высота, проведенная из вершины A . Найти AC и AB .

5. Четыре шара с одинаковыми радиусами, равными R , расположены так, что каждый касается трех остальных. Найти радиус шара, касающегося четырех данных шаров.

Ответы: 1. 4 точки, 18 см/с. 2. 7; 3. 3. $a=3$.

4. 13 и 15. 5. $R\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\pm 1\right)$.

ВАРИАНТ 22, МГУ, 1965 г.

1. Из полного бака, содержащего 729 л кислоты, отлили a литров и долили бак водой. После перемешивания отлили a литров раствора и снова долили бак водой. После того как такая процедура была повторена 6 раз, раствор в баке содержал 64 л кислоты. Определить величину a .

2. Найти положительные решения неравенства $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$.

3. Решить уравнение $\sin 18x \operatorname{ctg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0$.

4. Многочлен $x^4+x^3-x^2+ax+b$ имеет два одинаковых корня, равных 1. Найти a и b .

5. Ребра треугольной пирамиды, выходящие из вершины O , попарно перпендикулярны, их длины равны a , b и c . Найти объем куба, вписанного в эту пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с вершиной O .

Ответы: 1. 243 л. 2. $0 < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < 3$.

3. $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm \frac{k\pi}{6}$. 4. $a = -5$, $b = 4$.

5. $\left(\frac{abc}{ab+ac+bc}\right)^3$.

ВАРИАНТ 23, МГУ, 1967 г.

1. Квадрат целого положительного простого числа N делится с остатком на 3, полученное неполное частное делится без остатка на 3, частное вновь с остатком делится на 3, и, наконец, полученное неполное частное опять с остатком делится на 3 и дает в результате 16. Найти N .

2. Решить неравенство $\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2-3x+1) \geq 0$.

3. Указать виды всех треугольников, у которых стороны составляют геометрическую прогрессию, а углы — арифметическую.

4. Решить уравнение $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos y = 3 + \cos 2y$.

Ответы: 1. $N=37$; 2. $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \leq 3$; 3. Условие задачи выполнимо только для равностороннего треугольника. 4. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = (2n \pm k)\pi$.

ВАРИАНТ 24, МГУ, 1968 г.

1. Решить неравенство $\log_{\sin x + \sqrt{3} \cos x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3 \right) \geq 0$.

2. В четырехугольник $ABCK$ можно вписать окружность, вокруг него можно также описать окружность. Найти сторону AB , если известны углы A и B и радиус R описанной окружности.

3. Предполагается использовать 2000 рублей на путевки в дома отдыха. Путевки есть на 15, 27 и 45 дней. Стоимость их соответственно: 21, 40 и 60 руб. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее количество дней отдыха было наибольшим?

4. Решить неравенство $y - \left| \frac{1}{\cos x} \right| - \sqrt{1 - y - x^2} \geq 0$.

Ответы: 1. $\frac{\pi}{2} < x < 2$; $-\frac{\pi}{6} < x \leq 1$; $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое, отличное от нуля, целое число.

2. $AB = \frac{2R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A+B}{2}}{\sqrt{1 + \sin A \sin B}}$; 3. 2 путевки по 40 руб. и 32 путевки по 60 руб.; 4. $x=0$, $y=\pi$.

ВАРИАНТ 25, МГУ, 1969 г.

1. Решить уравнение $(\sqrt{\cos x} - 4 \sqrt[4]{2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} + 5 \sqrt[4]{2})^2 - 2 \sqrt{\cos x} (\sqrt{\cos x} - 4 \sqrt[4]{2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} + 5 \sqrt[4]{2}) - \sin x = 0$.

2. Четыре группы туристов отправились в поход по маршрутам различной длины. Сумма расстояний, пройденных первой и четвертой группами, на шесть километров больше суммы расстояний, пройденных второй и третьей группами. Вторая группа прошла на два километра меньше первой. Число туристов третьей группы равно расстоянию, пройденному первой группой, а число туристов второй группы равно расстоянию, пройденному четвертой группой. Сумма квадратов расстояний, пройденных каждой группой, равна 494. Сколько километров прошла каждая группа?

3. В круг радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что углы A , C и E равны между собой, $AB=a$, $CD=b$, $EF=c$. Вычислить площадь шестиугольника $ABCDEF$.

4. Решить неравенство $(4x - x^2 - 3) \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) \geq 1$.

Ответы: 1. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. 2. 12 км, 10 км, 9 км, 13 км.

$$3. 3\sqrt{3}R^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}a(\sqrt{12R^2 - 3a^2} - a) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{8}b(\sqrt{12R^2 - 3b^2} - b) + \frac{\sqrt{3}}{8}c(\sqrt{12R^2 - 3c^2} - c).$$

4. $x=2$.

ВАРИАНТ 26, МГУ, 1970 г.

1. В правильный тетраэдр $ABCE$ вписан шар K . Точка O обладает следующими свойствами: лежит на поверхности шара K ; находится на расстоянии половины радиуса шара K от грани ABC ; ближайшая к точке A точка, обладающая первыми двумя свойствами. Найти сумму расстояний от точки O до граней ABE , ACE и BCE , если объем тетраэдра равен 1.

2. Решить уравнение $\left(\frac{x}{\pi}\right)^x - \sin \frac{x}{2} + \cos x + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = 0$.

3. Решить неравенство: $\log_x 4 \leq \sqrt{\log_{\sqrt{x}} 2x^2}$.

4. Найти хотя бы один многочлен второй степени $M = ax^2 + bx + c$, чтобы выполнялось неравенство: $\left| M - \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x/3} \right| < 0,04$ при $0 \leq x \leq 1$.

Ответы: 1. $\frac{7}{4} 3^{1/6}$. 2. $x=0$. 3. $0 < x \leq \sqrt{2}/2$, $x \geq 4^{4/(1+\sqrt{17})}$.
4. $M = x^2/9 - x/3 + 3/2$.

ВАРИАНТ 27, МГУ, 1975 г.

1. Трем машинисткам было поручено напечатать отчет. В первый день работали только первая и третья машинистки, и было отпечатано 30% отчета. Два последующих дня работали первая и вторая машинистки, и было отпечатано ещё 65% отчета. Оставшуюся часть отчета допечатала третья машинистка, затратив на это половину рабочего времени четвертого дня. За сколько дней был бы отпечатан отчет каждой машинисткой в отдельности, если считать интенсивность работы каждой машинистки постоянной?

2. Вокруг треугольника ABC со сторонами $AB = 5(1 + \sqrt{3})$ см, $BC = 5\sqrt{6}$ см, $AC = 10$ см описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, а через точку B — прямая, параллельная стороне AC . Эта касательная и эта прямая пересекаются в точке E . Определить площадь четырехугольника $ABEC$.

3. Решить уравнение $1 - \sqrt{\frac{3 + 10 \sin^2 x}{\sin^2 x}} = 2 \operatorname{ctg} x$.

4. Найти все целые положительные решения уравнения $3x^2 + 3xy + 2x - y = 56$.

5. Решить неравенство $\log_{\frac{x-1}{x-2}} 3 \geq \log_{\frac{1}{x}} 3$.

Ответы: 1. 5 дней, 8 дней, 10 дней. 2. $\frac{125}{4}(3 + \sqrt{3})$ см².

3. $x = \operatorname{arccotg}(-2) + k\pi$. 4. $x = 2, y = 8$. 5. $x > 2$.

ВАРИАНТ 28, МГУ, 1975 г.

1. Решить уравнение: $(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}})^{1/\cos x} + (\sqrt{8 - 3\sqrt{7}})^{1/\cos x} = \frac{26}{5}$.

2. Дан треугольник ABC , причем $AB = AC$ и угол A равен 80° . Внутри треугольника ABC взята точка M , такая, что угол MBC равен 30° , угол MCB равен 10° . Найти угол AMC .

3. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 5} + x^2 - 7 \geq \sqrt{2(x^2 - 7)^2 + 2x^2 - 10}$.

4. Детский сад хочет приобрести на сумму 220 руб. наборы конфет. Наборы одного типа стоят 5 руб., в каждой коробке 50 конфет, наборы другого типа — 18 руб., в каждой коробке 190 конфет, наборы третьего типа — 15 руб., в каждой коробке 160 конфет. Сколько коробок каждого типа должен купить детский сад, чтобы общее количество купленных конфет было максимальным?

Ответы: 1. $\pm \arccos(\log_5 \sqrt{8+3\sqrt{7}}) + k\pi$. 2. 70° . 3. ± 3 .
 4. 2 коробки первого типа и 14 коробок второго типа.

ВАРИАНТ 29, МГУ, 1977 г.

1. Решить уравнение $2\sqrt{x+5} = x+2$.
2. Указать промежутки возрастания, точки максимума и минимума функции $y = xe^{-3x}$.
3. Решить уравнение $|\sin x| = \sin x + 2 \cos x$.
4. Основание AB трапеции $ABCE$ вдвое длиннее основания CE и вдвое длиннее боковой стороны AE . Длина диагонали AC равна a , а длина боковой стороны BC равна b . Найти площадь трапеции.

5. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов уменьшилось на 2, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше, чем число новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

Ответы: 1. $x=4$. 2. При $x < 1/3$ функция возрастает; $x=1/3$ точка максимума; при $x > 1/3$ функция убывает. 3. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. 4. $\frac{3}{4}ab$.
 5. 144 солдата.

ВАРИАНТ 30, МГУ, 1978 г.

1. Решить уравнение: $9 \cos^4 x - \sin^4 x = 2 \sin^2 2x$.
2. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 мин после своего выезда из B . Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B , если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 ч быстрее пешехода?
3. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3 , а основания являются квадратами. Найти среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислить этот периметр.

4. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC на его основание AC опущена высота BE . Длина каждой из боковых сторон AB и BC треугольника ABC равна 8 см. В треугольнике BCE проведена медиана EK . В треугольник BEK вписана окружность, касающаяся стороны BK в точке M и стороны EK в точке N . Длина отрезка MN равна 2 см. Найти угол BAC .

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z)=3-z, \\ y^3+3y^2=x^2-3x+2, \\ z^2+y^2=6z, \end{cases} \text{удовлетворяющие условию } z \leq 3.$$

Ответы: 1. $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n$. 2. 5 ч. 3. Боковое ребро параллелепипеда 1 см, сторона основания 2 см, периметр боковой грани 6 см. 4. 30° . 5. 2; -3; -3 и 1; 0; 0.

ВАРИАНТ 31, МГУ, 1979 г.

1. Найти все значения x , при каждом из которых касательная к графику $y = \cos 7x + 7 \cos x$ в точке с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\pi/6$.

2. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4 ч. Для наполнения бассейна наполовину первому насосу требуется времени на 4 ч больше, чем второму насосу для наполнения бассейна на три четверти. За какое время наполняет бассейн каждый из насосов в отдельности?

3. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна M . Найти длины сторон параллелограмма.

4. Решить неравенство $\log_{9x^2} (6 + 2x - x^2) \leq 1/2$.

5. Найти все решения системы:

$$\begin{cases} \cos^2(xy) - 3 \sin(xy) \cos(xy) = 2 \cos y \cos(2xy - y) - 2 \cos^2(xy - y), \\ x^3 - xy + 1 = 0, \\ x^6 + 2xy \leq 5. \end{cases}$$

Ответы: 1. $\frac{\pi}{4}n, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$. 2. 16 ч и $\frac{16}{3}$ ч. 3. Все стороны параллелограмма равны $4R^3/M$. 4. $1 - \sqrt{7} < x \leq -1$; $-1/3 < x < 0$; $0 < x < 1/3$; $2 \leq x < 1 + \sqrt{7}$.

$$5. -\frac{\sqrt[3]{4-\pi}}{\sqrt[3]{4}}; -\frac{\pi}{2\sqrt[3]{8-2\pi}} \text{ и } -\sqrt[3]{1-\arctg 1/2}; \\ -\arctg 1/2: \sqrt[3]{1-\arctg 1/2}.$$

ВАРИАНТ 32, МГУ, 1980 г.

механико-математический факультет

1. Решить уравнение $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$.

2. Решить уравнение $\sin x = 5 \cos \frac{x}{2}$.

3. Окружность радиуса 3, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке K . Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC и касается стороны BC в точке E . Найти длину отрезка EK , если значение угла BCA равно 120° .

4. Касательная к графику $y=1/x^2$ такова, что абсцисса s точки касания лежит на отрезке от 5 до 9. При каком значении s площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=4$, будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая площадь?

5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3) + 2^{-x^2+2x} \log_{1/3}(2|x-a|+2) = 0$$

имеет три решения.

Ответы: 1. -3 ; 2. $\pi + 2k\pi$. 3. $3\sqrt{3}$. 4. $c=8$,
наибольшая площадь равна $1/8$. 5. $1/2$; 1 ; $3/2$.

ВАРИАНТ 33, МГУ, 1981 г.

факультет психологии

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4 \\ y^9\sqrt{4y^2-x^2}=0 \end{cases}$$

2. На плоскости лежит квадрат с длиной стороны, равной a . Поворотом в этой плоскости квадрата вокруг одной из его вершин на угол 30° получается другой квадрат. Найти периметр четырехугольника, являющегося общей частью этих двух квадратов.

3. Найти все решения уравнения $\sqrt{2} \cos 8x + \sqrt{2} \sin 8x = -1$, удовлетворяющие условию: $3\pi/8 < x < 0,7\pi$.

4. Решить уравнение: $\frac{3}{2}(\log_5(2x-3))^2 + 12(\log_5\sqrt{x})^2 =$
 $= (\log_5(2x-3))^3 \cdot \log_5 x^3.$

5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2 + 2ax - (a^2 - 2a + 3)$ на отрезке от 0 до 1 равно -2 .

Ответы: 1. $8/3$; $4/3$ и 8 ; -4 . 2. $\frac{2}{3}(3 + \sqrt{3})a$. 3. $43\pi/96$;
 $59\pi/96$; $67\pi/96$. 4. 3 и $9/4$. 5. $1/2$ и $2 + \sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 34, МГУ, 1982 г.

факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Какое из чисел больше: $\sqrt{18}$ или $4^{\log_2 3 + \log_4 \left(\frac{5}{11}\right)}$?

2. Найти все значения x , для каждого из которых функция $y = 4\cos^2 x + 3\sqrt{3}\sin x + 7\sin^2 x$ принимает наименьшее значение.

3. Решить неравенство $\frac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{(3x^2 - 3)}} \leq 2x + 3$.

4. На фабрике несколько одинаковых поточных линий вместе выпускали в день 15000 банок консервов. После реконструкции все поточные линии заменили на одинаковые, более производительные, а их количество увеличилось на 5. Фабрика стала выпускать в день 33792 банки. Сколько поточных линий было первоначально?

5. Для каждого значения параметра a найти все значения x , удовлетворяющие уравнению: $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

6. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O . Касательная к окружности в точке C пересекается с прямой, делящей пополам угол B треугольника в точке K , причем угол BKC равен половине угла C треугольника. Сторона AB на $\sqrt{3}$ длиннее стороны AC , а расстояние от точки O до стороны AC на 1 больше расстояния от точки O до стороны AB . Найти радиус окружности.

Ответы: 1. $\sqrt{18}$ больше. 2. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + n\pi$.

3. $-\frac{3}{2} \leq x \leq -1$; $1 < x \leq 2$. 4. 6 поточных линий.

5. При $|a| < 1$ $x = -3$ и $x = \frac{7-3a}{a+1}$; при $|a| > 1$ $x = -3$;
 при $a = -1$ $x \leq 3$; при $a = 1$ $-3 \leq x \leq 2$. 6. $\sqrt{7}/2$.

ВАРИАНТ 35, МГУ, 1983 г.

факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Найти область определения функции $y = \sqrt{16 - x^2} \log_2(x^2 - 5x + 6)$.

2. Решить уравнение: $(1 + 2 \sin^2 x - 3 \sqrt{2} \sin x + \sin 2x) : (2 \sin x \cos x - 1) = 1$.

3. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости условием: $2|x| + |y + 2x + 1| \leq 5$.

4. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° . Построен круг радиуса $2/\sqrt{3}$ с центром в вершине этого треугольника, противоположной основанию. Определить отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

5. Для каждого значения параметра a найти все значения x , удовлетворяющие уравнению: $(x-3)(x+1) + 3(x-3) \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$.

6. Найти все пары чисел x, y , удовлетворяющие условию: $\sqrt{2 - |y|} \cdot (5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3 \sqrt[3]{33}) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5}{4} \pi^2$.

Ответы: 1. $-4 \leq x < 2; 3 < x \leq 4$. 2. $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

3. 25 кв. единиц. 4. $(2\pi\sqrt{3} + 9)/27$. 6. $x = -1, y = \pm 2$.

ВАРИАНТ 36, МГУ, 1984 г.

факультет психологии

1. Вычислить, не используя микрокалькулятора:

$$\left(\frac{3 \left(\frac{17}{90} - 0,125 : 1 \frac{1}{8} \right) : 480}{\left(7 : 1,8 - 2 \frac{1}{3} : 1,5 \right) : 2 \frac{2}{3}} \right) : \left(\frac{679 \cdot 10^{-2}}{0,7} + 0,3 \right).$$

2. Подъем в гору турист прошел за 2 ч. На спуск с горы, который был на 18 км длиннее подъема, турист затратил вдвое больше времени, чем на подъем в гору. Найти общую длину

пройденного туристом пути, если каждый километр при спуске турист проходил на 10 мин быстрее, чем при подъеме.

3. Решить уравнение $2(\cos x - 1) \sin 2x = 3 \sin x$.

4. Две окружности радиусом 8 и 6 пересекаются в точках A и B . Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка C_1 лежит на окружности с центром O_1 , а длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найти расстояние между точками O_1 и O_2 , если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.

5. Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого ее членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.

6. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

— первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр;

— разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

7. Найти все пары чисел x, y , удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2; \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

Ответы: 1. 180. 2. 30 км. 3. $x = \pi k$; $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

4. $6 + 2\sqrt{2}$. 5. 3. 6. 233; 390; 466; 699.

7. $x = \frac{1}{2} + \log_2 3$, $y = \frac{1}{2} - \log_2 3$.

ВАРИАНТ 37, МГУ, 1985 г.

отделение структурной и прикладной лингвистики
филологического факультета

1. Найти все решения уравнения $\sqrt{2} \cos^2 x = \cos x$, удовлетворяющие условию $-6 < x < -4$.

2. Маша, Вера, Таня и Нина собирали грибы. Оказалось, что количество грибов, собранных каждой из них, образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Таня нашла столько же грибов, сколько Нина, а Нина нашла бы на 12 грибов больше, то количество грибов, собранных девочками, образовывали бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько грибов нашла Вера?

3. Решить неравенство $\log_{1/3}(x + \sqrt{x-1}) > -1$.

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 15, а длина высоты BE равна 5. На стороне AB взята точка P так, что длины отрезков AP и PB равны соответственно 5,8 и 7,2. Найти площадь треугольника BPC , если известно, что эта площадь больше 3.

5. Для каждого значения параметра b решить уравнение

$$3\cos x \sin b - \sin x \cos b - 4\cos b = 3\sqrt{3}.$$

Ответы: 1. $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}$. 2. 6 грибов. 3. $1 \leq x \leq 2$.

4. $\frac{36}{13}(5\sqrt{2}+6)$. 5. При $b = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; при $b = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$;

при других значениях b решений нет.

ВАРИАНТ 38, МГУ, 1986 г.

географический факультет

1. Решить неравенство $\frac{x-3}{x^2+2x-5} > \frac{1}{2}$.

2. Решить уравнение $\log_x \sqrt{3} - \log_{x^2}(27) = \frac{1}{2}$.

3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполнять водой, причем в первую поступает 100, во вторую — 60 и в третью — 80 литров воды в минуту. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья — частично заполнены и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент во второй цистерне больше, чем в третьей?

4. Внутри треугольника ABC взята точка K . Известно, что длина отрезка AK равна 1, длина отрезка KC равна $\sqrt{3}$, а величины углов AKC , ABK и KBC равны 120, 15 и 15° соответственно. Найти длину отрезка BK .

5. Для каждого значения a , удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$, найти наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 - 2a(x+y)$ при условии: $\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right) = 1$.

Ответы: 1. $-1 - \sqrt{6} \leq x < -1 + \sqrt{6}$. 2. $x = 1/9$. 3. В 2 раза.

4. $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$. 5. $-a^2$ при $a \leq 4 - 2\sqrt{2}$; $8 - 8a$ при $a \geq 4 - 2\sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 39, МГУ, 1987 г.

физический факультет

1. Решить неравенство $\frac{1}{2x} \geq \frac{1}{1-x}$.

2. Решить уравнение $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$.

3. Известно, что $\sin a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < a < 4\pi/3$. Найти $\cos a$ и $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

4. Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_{1/2}(3x^2 - 2x)}$.

5. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B — прямой) взята точка E так, что площади треугольников ABE и BEC соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC . Длины отрезков AE и EC равны соответственно a и c . Найти длину отрезка BE .

6. Шар радиуса 2 вписан в правильную четырехугольную пирамиду $KABCE$ с вершиной K . Второй шар радиуса 1 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BKC и SKE . Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре KC .

Ответы: 1. $0 < x \leq 1/3$; $x > 1$. 2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

3. $-2/3$ и $-\sqrt{5}$. 4. $-1/3 \leq x < 0$; $2/3 < x \leq 1$.

5. $\sqrt{\frac{3a^2 + 8c^2}{35}}$. 6. $1024/9$; $\arccos(-9/25)$.

ВАРИАНТ 40, МГУ, 1988 г.

геологический факультет

1. Решить уравнение $(x+1)(|x|+2+\frac{1}{2\sqrt{3}}-\sqrt{5})=0$.

2. Найти все решения неравенства $(x^2-18x+77)\sqrt{10-x} \geq 0$.

3. Решить уравнение $(x^2-7x+10)(\log_{x/2}(8x)+3)=0$.

4. Точка O делит отрезок AB на отрезки $OA=6$ и $OB=4$. С центром в точке O проведена окружность, из точек A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M , причем точки касания лежат по одну сторону прямой AB . Найти радиус окружности, если $OM=12$.

5. Четыре цеха изготавливают детали прессованием. В двух из них установлены прессы нового типа, а в двух — старого. Всего прессов каждого типа имеется не более 5. Количество прессов во всех цехах одинаково. Изготовление 400 деталей на новом прессе

занимает на 3 ч меньше времени, чем 420 деталей на старом. На новых прессах изготовили по 200 деталей, а на старых — по 300. Если сложить время работы всех прессов, то окажется, что за получившееся суммарное время цех, оборудованный тремя новыми и двумя старыми прессами, работающими одновременно, может изготовить 17640 деталей. Найти производительность каждого пресса.

Ответы: 1. -1 . 2. $x \leq 7$; $x = 10$. 3. 1 и 5. 4. $\frac{6}{7}\sqrt{21}$.

5. Производительность нового пресса 100 деталей в час, старого — 60 деталей в час.

ВАРИАНТ 41, 1988 г.

МГПИ им. В. И. Ленина

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2(x-3)$ на отрезке от 1 до 4.

2. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиусом 1 см. Периметр треугольника равен 15 см. Найти стороны треугольника.

3. Решить уравнение $3 + \log_{1/2} \left(\frac{32}{x+3} \right) = \log_{1/2} (2-x)$.

4. Решить неравенство $\frac{x}{x^2 - 3x - 4} > 0$.

5. Найти все значения x , принадлежащие промежутку $-\pi$; π и удовлетворяющие соотношению $|\sin 2x| = \cos^4 \left(\frac{x}{2} \right) - \sin^4 \left(\frac{x}{2} \right)$.

Ответы: 1. Наибольшее значение 16, наименьшее равно -4 .

2. $5/2$; 6; $13/2$. 3. -2 ; 1. 4. $-1 < x < 0$; $x > 4$.

5. $\pm \frac{\pi}{6}$; $\pm \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 42, 1988 г.

Московский институт электронного машиностроения

1. Решить уравнение $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}$.

2. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$.

3. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a . Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные бо-

ковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен b .
Определить объем призмы.

4. Вычислите сумму корней уравнения $x^2 + 2(a^2 - 3a)x - (6a^3 - 14a^2 + 4) = 0$ и найдите значения a , при которых она принимает наибольшее значение.

5. Решить уравнение $\left(x - \lg \frac{x}{2}\right)^{\lg^2(2x) - \lg \frac{x}{5} - 1} = 1$.

Ответы: 1. При $|a| < 1$ $x = (a+1)^2/4$; при $|a| \geq 1$ решений нет.

2. $2\pi k$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$. 3. $(a^3) \sqrt{2 \cos \frac{b}{2} \sin \frac{b}{2}}$.

4. $a=2$, 5. $\frac{1}{2}$; 5.

ВАРИАНТ 43, 1988 г.

Новосибирский государственный университет

1. Решить уравнение $\frac{\sin 2x - 0,8 \cos x + 1}{\sin(x/2)} = 5 \cos \frac{x}{2}$, при $\frac{5\pi}{8} \leq x \leq 2$.

2. Решить уравнение $\lg \frac{4x^2 + 1}{2 - x} + \lg \frac{2 - x}{11x + 4} = 0$.

3. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$, $BC=2$ вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B и C лежат на сторонах квадрата, не содержащих точку A . Найдите площадь квадрата.

4. Решить уравнение $\sqrt{4-x} + 4\sqrt{-x} = 4 - \sqrt{4-x} - 4\sqrt{-x}$.

5. В основании треугольной пирамиды $KABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB=2$, $AC=4$. Боковые ребра пирамиды равны 4. На луче CA выбраны точки M , E , так что $CM=1$, $CE=6$, на луче BK выбраны точки P , O , так что $BP=2$, $BO=5$. Найдите объем пирамиды $MEPO$.

Ответы: 1. $\pi - \arcsin \frac{2}{5}$. 2. $-1/4$. 3. $81/10$. 4. $-4 \leq x \leq 0$.

5. $5\sqrt{11}/4$.

ВАРИАНТ 44, 1988 г.

Московский авиационный институт

1. Решить уравнение $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2 2x = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

2. Найти отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к пятнадцатому ее члену, если сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40% суммы ее начальных двенадцати членов.

3. Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_{(3x+1)} \frac{x-2}{x-4}}$.

4. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1?

5. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 4 + 4x; \\ \sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) = 0. \end{cases}$$

6. На координатной плоскости заданы точки $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(2; 0)$, $C(4; 0)$. Найти координаты точки M такой, что угол OMA равен углу CMB , а угол MAO равен углу MBC .

Ответы: 1. $\frac{5\pi}{6} + \pi k$. 2. $5/2$. 3. $-1/3 < x < 0$; $x > 4$.
4. $4\sqrt{3}/27$. 5. 4 ; -5 0; -1 4; -3 0; 1.
6. $-4/3$; $8/3$ и $4/5$; $8/5$.

ВАРИАНТ 45, 1988 г.

Московский институт стали и сплавов

1. Вычислить $\frac{(13,75 + 9,5) \cdot 1,2}{(10,3 - 8,5) \cdot 5/9}$.

2. Упростить и вычислить при $x = 1,33$ выражение $\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{x+1}{\sqrt{x^3-1}} + \frac{2}{x^{-1/2}}$.

3. Вычислить $\cos a$, если $\operatorname{tg} a = -3\frac{3}{7}$ и $\pi/2 < a < \pi$.

4. Вычислить $(7 \cdot 7^{2/\log_b 7})b$, при $b = \sqrt[3]{2}$.

5. Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - x} + x = 1$, в ответе дать сумму корней.

6. Печь нагревается равномерно. Через 0,5 ч после начала нагрева температура печи была 500°C , а еще через 1 ч — 900°C . Какова была первоначальная температура печи?

7. Решить неравенство $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4} < 0$ и в ответе записать сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

8. Площадь осевого сечения конуса равна 12, а длина его образующей равна 5. Найти отношение объема конуса к площади его боковой поверхности.

9. Определить значение параметра a , при котором корни уравнения $x^2 + (a-1)x + 2a - 8 = 0$ удовлетворяют условиям: $2x_1 - x_2 = -6$, $x_1 < x_2$.

10. Решить уравнение $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$, в ответе дать сумму корней.

11. Решить уравнение $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1$, в ответе, в градусах, записать корень, лежащий на отрезке от -90° до 90° .

12. В полушар радиусом $\sqrt{3}/2$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Найти объем куба.

Ответы: 1. 27,5. 2. 2,33. 3. -0,28. 4. 14. 5. -0,5.
6. 300. 7. 6. 8. 0,8. 9. 4. 10. 2. 11. 0.
12. 1.

ВАРИАНТ 46, 1988 г.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

1. Решить уравнение $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+1} = 0$.

2. На предприятии работают 3 машинистки разной квалификации. Первая печатает в час на 2 страницы больше, чем вторая, у третьей на печатание страницы уходит на 4 минуты больше, чем у первой и в $4/3$ раза больше времени, чем у второй. Сколько страниц в час печатает первая машинистка?

3. Решить уравнение $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$.

4. Решить уравнение $10^{(6 \log_x 10)^2 - 13} \cdot x^{\lg x} = 1$.

5. В треугольнике ABC сторона AC равна 26, а медианы, проведенные из вершин A и C , равны соответственно 36 и 15. Найти третью медиану.

6. Найти все значения параметра a , для которых неравенство $\sin^5 x + \cos^5 x - a(\sin x + \cos x) \geq \frac{a^2 - 11}{2} (\sin x + \cos x) \sin x \cos x$ выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $0 \leq x \leq \pi/4$.

Ответы: 1. 0. 2. 10 листов. 3. $\frac{\pi}{2} + k\pi$. 4. 0,001; 0,01; 100; 1000. 5. 39. 6. $-6 \leq a \leq 1$.

ВАРИАНТ 47, 1988 г.

Ленинградский государственный университет

1. Решить уравнение $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$.

2. Решить неравенство: $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3(3x) \leq 1$.

3. Найти все значения параметров a и b , для которых все вещественные корни уравнения $x^2 - ax + a = 0$ являются также корнями уравнения $x^2 + b^2x - 8b = 0$.

4. Найти площадь фигуры, образованной теми точками декартовой плоскости, для которых выполнены неравенства $|x+1| + |y| \leq 2$, $(x+2)^2 + y^2 \leq 1$.

5. В прямой круговой конус вписан шар объемом C . Какое наименьшее значение может иметь объем конуса?

Ответы: 1. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$. 2. $1 \leq x \leq 3$; $x \geq 81$. 3. $a = -64$, $b = 8$; $a = 0$, $b = 0$; $0 < a < 4$, b — любое действительное число; $a = 4$, $b = 2 \pm \sqrt{2}$. 4. $\frac{\pi}{2} + 1$. 5. $2C$.

ВАРИАНТ 48, 1988 г.

Ленинградский политехнический институт

1. Решить уравнение $10 + \frac{3}{4 \log_{25} x - 1} - \frac{13}{6 \log_5 x - 5} = 0$.

2. Решить уравнение $26 \sin^2 x - \sin 2x = 2$.

3. Решить неравенство $|24x^2 - 39x - 8| < |18x^2 - 25x + 32|$.

4. В окружности радиусом R проведены диаметр и хорда, образующие угол $2 \arctg 1/4$. Точка их пересечения лежит на расстоянии $R/2$ от центра окружности и делит диаметр и хорду на две части. Найти радиус круга, касающегося исходной окружности и меньших частей диаметра и хорды.

5. Известно, что A, B, C, K постоянные, $16K$ меньше 49. Сумма функций $\frac{1}{Ax+B}$ и $\frac{1}{Cx-1}$ равна функции $\frac{12x-6}{4x^2-7x+K}$. Найти K .

Ответы: 1. $5^{2/5}$; 5. 2. $\arctg 1/3 + k\pi$; $-\arctg 1/4 + k\pi$.
 3. $-5/3 < x < 2/3$; $6/7 < x < 4$. 4. $(\sqrt{21}-3)/16$.
 5. -2 ; $33/16$.

ВАРИАНТ 49, 1988 г.

Московский авиационный технологический институт

1. Решить неравенство $3|x-1| > x+1$.
2. Решить уравнение $x^{3 \lg x} = 10x^2$.
3. Решить уравнение $\sin 4x + \sin 12x + \cos 4x = 0$.
4. Два автобуса одновременно выехали из A в B . Первый автобус имел скорость на 4 км/ч больше, чем второй, и прибыл в B на 10 мин раньше. Найти скорости автобусов.
5. Медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, относятся как $\sqrt{2}:1$. Найти углы треугольника.

Ответы: 1. $x < 1/2$; $x > 2$. 2. 10; $10^{-1/3}$. 3. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$;

$(-1)^{n+1} \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}$. 4. 36 км/ч; 32 км/ч.

5. $\arctg \sqrt{7/2}$; $\arctg \sqrt{2/7}$.

ВАРИАНТ 50, 1988 г.

Московский государственный технический университет

1. На прямой $x-2y=2$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные прямые, касающиеся графика функции $y=x^2/2$.

2. Решить уравнение $\sin 5x - \cos(x + \pi/2) = \sin(2x - \pi/2)$.

3. Решить уравнение $\log_2(3x+5) = 3 - \log_2(x+1)$.

4. Решить неравенство $5^x + \frac{15}{2-5^x} = 0$.

5. Конус с углом α между образующей и высотой вписан в сферу радиусом R так, что его вершина находится в центре сферы, а окружность основания — на сфере. Все вершины нижнего основания правильной треугольной призмы, параллельного основанию конуса, лежат на сфере, а остальные ее вершины принадлежат боковой поверхности конуса. Какими должны быть высота и стороны основания призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найти это значение площади.

- Ответы: 1. 1; $-1/2$. 2. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. 3. $1/3$.
 4. $\log_3 2 < x < 1$. 5. $0,5 R/\cos(a/2); R\sqrt{3} \sin(a/2);$
 $\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 \operatorname{tg}(a/2)$.

ВАРИАНТ 51, МГУ, 1989 г.

механико-математический факультет

1. Решить уравнение $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$.
2. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3((5/2)-x)+\log_3 2} = 0$.
3. Стороны KE и PM трапеций $KPME$ параллельны, причём $KE=3$, а угол M равен 120° . Прямые PM и ME являются касательными к окружности, описанной около треугольника KPE . Найти площадь треугольника KPE .
4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 5/2; \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

5. Отрезок RO параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KPME$, причём $KP=1$, $RO=3$. Все стороны прямоугольника $KPME$ и отрезки KR , PR , EO , MO , RO касаются плоскости некоторого шара. Найти объём этого шара.
6. Найти наименьшее из значений x , для которых существуют числа y , z , удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$.

- Ответы: 1. $\pm \arccos \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi k$. 2. $1 - \sqrt{3} \leq x \leq \frac{3-5}{2};$
 $2 < x < 2,5$. 3. $3\sqrt{3}/4$. 4. $1/9; 1/81$.
 5. $36\pi/11\sqrt{11}$. 6. $-\sqrt{7/5}$.

ВАРИАНТ 52, МГУ, 1989 г.

физический факультет

1. Решить уравнение $\sin 5x - \sin x = \sqrt{8} \cos 3x$.
2. В остроугольном треугольнике площади S известны величины a и b углов A и B . Найти длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B .
3. Решить уравнение $\log_2(x+4) + 2\log_2 \sqrt{x} = 5$.

4. В правильной четырехугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса, вписанного в пирамиду шара, к апофеме пирамиды.

5. При каких значениях m уравнение $(2x)^2 - 4x(m3^m)^{1/2} + 3^{m+1} + m - 3 = 0$ имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях m ?

6. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и E , M — точка пересечения прямых AB и CE ; B лежит между A и M . Найти: радиус окружности, описанной около треугольника ACE ; отношение высот треугольника MAC и MAE , опущенных из вершины M .

Ответы: 1. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$. 2. $\sqrt{\frac{2C \sin a \sin b}{\sin(a+b)}}$. 3. 4.
4. $\sqrt{6(5 - \sqrt{15})}/10$. 5. При $m=0$ $x=0$; при $m=3$ $x=4,5$; при $m>3$ оба корня положительны; при других значениях m решений нет. 6. $\sqrt{r} R$; $\sqrt{r/R}$.

ВАРИАНТ 53, МГУ, 1989 г.

биологический факультет

1. Решить уравнение $\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{1/7}(1 + x) = 0$.
2. Найти наименьшее значение функции $y = (2x^3 - 9x^2 + 12x + 1)^{-1}$ на отрезке $0 \leq x \leq 3$.
3. Решить уравнение $\sin x (3 \sin 2x \sin^3 x + 12 \sin 2x \sin x - 16 \cos x) + 2 \sin 4x = 0$.
4. В окружность радиусом 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K , лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$, $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH , пересекающая окружность в точке N и H . Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2, а угол NFH — тупой. Найти угол NKF .
5. Числа x , y и z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + y - z$?

Ответы: 1. 3. 2. 0; 1. 3. $\frac{\pi k}{2}$; $\pm \arcsin \sqrt{2/3} + \pi k$.
4. $\arcsin \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{77}}{28}$. 5. $\sqrt{32}/3$.

ВАРИАНТ 54, МГУ, 1989 г.

геологический факультет

1. Какое из чисел больше: $2 \log_2 5$ или $3 \log_{1/8}(1/23)$?

2. Решить неравенство $x \leq \frac{2}{x+1}$.

3. На отрезке от 0 до 2π найти все решения уравнения

$$\frac{|\cos x|}{\cos x} = \cos 2x - 1.$$

4. В треугольнике ABC угол ACB прямой, CE — биссектриса, $AE = 2\sqrt{3}$. Найти BC , если известно, что $EM = \sqrt{3}$, где EM — высота треугольника AEC .

5. В сосуде находится 9 кг раствора соли в воде. Из сосуда отлили часть раствора и добавили количество воды, равное по массе отлитой части раствора. Затем опять вылили столько же по массе раствора, сколько в первый раз. После этого количество соли в сосуде уменьшилось в $9/4$ раза по сравнению с исходным количеством. Определить первоначальное количество соли в сосуде, если известно, что масса добавленной воды вдвое меньше первоначальной массы соли в растворе.

6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(a^2 + 8a + 16)(2 - 2\cos x - \sin^2 x) + (32 + 2a^2 + 16a)(\cos x - 1) + 3a + 10 = 0$ не имеет решений.

Ответы: 1. Первое число больше. 2. $x \leq 2$; $-1 < x \leq 1$.
3. $5\pi/4$. 4. $\sqrt{3} + 1$. 5. 6 кг. 6. $a < -10/3$;
 $-3 < a < -2$.

ВАРИАНТ 55, МГУ, 1989 г.

факультет психологии

1. Решить неравенство $x + 3 < \frac{1}{x+1}$.

2. Найти все решения уравнения $\left| \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \right| = 3 \cos x + 1$.

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2 \log_x 8 + 3y = 24; \\ -2(\log_x 0,5)^3 + y = 8. \end{cases}$$

4. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN , NP и PQ , а другая — сторон MN , MQ и PQ . Точки B и A лежат, соответственно, на сторонах MN и PQ , причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найти длину отрезка MQ , если

$NP=b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на величину $2p$.

5. При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $x+2a-\sqrt{3ax+4a^2}>0$.

Ответы: 1. $x < -2 - \sqrt{2}$; $-1 < x < -2 + \sqrt{2}$.
2. $\pm \arccos(-1/3) + 2\pi k$. 3. 2; 6 и $1/2$; 10.
4. $b+p$. 5. При $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ $x > 0$;
при $a > 0$ $-4a/3 < x < -a$; $x > 0$.

ВАРИАНТ 56, 1989 г.

Московский государственный педагогический институт

1. Найти объем шара, вписанного в усеченный конус, образующая которого равна 10 и составляет угол в 45° с плоскостью основания.

2. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

3. Решить уравнение $2^{4x+2} \cdot 4^{-x^2} - 5 \cdot 2^{-x^2+2x} + 1 = 0$.

4. Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_{x-1}(x^2-9)}$.

5. Найти промежутки возрастания функции $y = 5x^3 - 3|x|$.

Ответы: 1. $125\pi\sqrt{2}/3$. 2. $\frac{\pi(4k-1)}{4}$; $\frac{\pi(4k+1)}{2}$; $2\pi k$.
3. 0; 2; $1 \pm \sqrt{3}$. 4. $x \geq 10$. 5. $x < 0$; $x > 5^{-1/2}$.

ВАРИАНТ 57, 1989 г.

Московский авиационный институт

1. Шестой член арифметической прогрессии равен 10, а сумма первых шестнадцати членов этой прогрессии равна 200. Найти двенадцатый член прогрессии.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

3. Найти наименьшее и наибольшее возможные значения площади параллелограмма, произведение длин двух неравных высот которого равно 9, а величина острого угла параллелограмма не меньше 30° и не больше 45° .

4. Решить неравенство $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)} \leq 1$.

5. Найти все рациональные значения параметра a , при которых функции $\sin\left(\frac{2ax}{a^2 + \sqrt{12}}\right)$ и $\operatorname{tg} \frac{2x}{1 - 2a + \sqrt{108}}$ имеют одинаковые периоды.

6. Вершина конуса лежит в плоскости основания $ABCE$ правильной четырехугольной пирамиды $KABCE$, а окружность основания конуса вписана в четырехугольник, получившийся в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AE и BC основания пирамиды и делящей ребро KC в отношении $3:1$, считая от вершины K . Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

Ответы: 1. 16. 2. $\frac{\pi(4n+1)}{4}$, $\pi k - \operatorname{arctg} 2$. 3. $9\sqrt{2}$ и 18.
 4. $-1/5 < x < 0$; $0 < x < 1/7$; $1/7 < x < 2/7$; $x \geq 19/49$.
 5. -1 ; 0 ; $1/3$. 6. $\pi\sqrt{3/32}$.

ВАРИАНТ 58, 1989 г.

Новосибирский государственный университет

1. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 20%, а в другом — 30% олова. Сколько нужно взять первого и второго сплава, чтобы составить из них 10 кг нового сплава, содержащего 27% олова?

2. Решить уравнение $4 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = \frac{5}{\cos x}$.

3. В остроугольном треугольнике ABC длины медиан BM , CE и высоты AN равны соответственно 4, 5 и 6. Найти площадь треугольника.

4. Решить неравенство $\sqrt{21x+16} - \sqrt{x-4} < 20$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $KABCE$ лежит прямоугольник $ABCE$ со сторонами $AB=4$, $BC=2$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M — середина AK . Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определить величину угла между этой плоскостью и плоскостью KAC .

Ответы: 1. 3 и 7 кг. 2. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. 3. $8 + 2\sqrt{7}$.
 4. $4 \leq x < 29$. 5. $\operatorname{arctg} 4/\sqrt{5}$.

ВАРИАНТ 59, МГУ, 1990 г.

экономический факультет

1. Содержит ли область значений функции $y = 2x^2 - 4\sqrt{5}x + 8 + \log_2 12$ отрезок $\sqrt{2}$; 7? Ответ обосновать.

2. Решить уравнение $5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |5x + 3|$.

3. Окружность с центром в точке O , лежащей на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC , касается его катетов AB и BC . Найти длину AC , если известно, что $AM = 20/9$, $AE:ME = 6:1$, где M — точка касания AB с окружностью, а E — точка пересечения окружности с AC , расположенная между точками A и O .

4. Натуральные числа a , b и c , взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти эти три натуральных числа, если известно, что при указанных условиях их сумма максимальна.

5. Найти все корни уравнения $\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)} \sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2$, расположенные на отрезке от -3 до 2 .

6. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x - 5 = a - 2y + y^2; \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0; \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответы: 1. Не содержит. 2. $x \leq -1$; $x = \frac{1}{5}$. 3. $AC = \frac{1 + 4\sqrt{5}}{4}$.

4. 27; 189; 1323. 5. $-\frac{4}{3}$; $\frac{2}{3}$. 6. $a = -3$; $a = -2$.

ВАРИАНТ 60, МГУ, 1990 г.

физический факультет

1. Решить уравнение $x^2 - 4|x| - 1 = 0$.

2. В равнобедренной трапеции диагональ длины b образует угол α с основанием. Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение $\cos x \cos 3x = \cos 2x$.

4. В треугольнике ABC угол BAC равен α , угол ABC равен β , $BC=a$, AE — высота. На стороне AB взята точка P , так, что $AP/PB=1/2$. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке E . Найти радиус этой окружности.

5. Определить, при каких значениях a уравнение $\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2$ имеет решения, и найти эти решения.

6. В правильной треугольной пирамиде $KABC$ отрезок AE — высота основания ABC . Конус с вершиной A и образующей AE касается своей боковой поверхностью основания ABC и боковых граней AKC и AKB пирамиды. Известно, что $AE/KE=m$. Найти:

— отношение боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды;

— в каких границах может изменяться это отношение при изменении m ;

— при каких значениях m конус не имеет точек, находящихся вне пирамиды.

Ответы: 1. $\pm(2+\sqrt{5})$. 2. $b^2 \sin 2\alpha/2$. 3. $\pi k/3$.

4. $a \sin(\alpha+\beta) (1+3 \sin^2 \beta)/12 \sin \alpha \sin \beta$.

5. $3-\sqrt{a+5}$ при $a > -4$, $a \neq -1$.

6. $\pi \sqrt{(3-m)/(5+m)}$; от 0 до $\pi \sqrt{3/5}$; $0 < m \leq 1$.

Ответы к заданиям для самостоятельной работы разделов 1—9

Раздел 1.1. 1. $a \neq \pm 2$ 2. $a=1$ 3. $a \neq -3$ 4. $a = -2/3$
 5. $a \neq 0, a \neq 1$ 6. При $a=1$ решений бесконечно много, $y_0 = 1 - x_0$,
 x_0 — любое действительное число; при $a \neq 1$ $x=1$, $y=0$
 7. $a = -1$, $b = \pm 1$.

Раздел 1.2. 1. Нет решений 2. $-1; 2$ 3. $-15; -7; -3; 5$
 4. $2; 7$ 5. $-18; 8$ 6. $(1 \pm \sqrt{41})/2$ 7. $2; 5$ 8. $4y^2 + 4y - 63 = 0$
 9. $(3 \pm \sqrt{13})/2$ 10. $a < -7/3$ или $a > -2$ 11. $a < (\sqrt{5}-1)/2$ или
 $a > 1$.

Раздел 1.3. 1. $1; (-3 \pm \sqrt{5})/2$ 2. $0,5; 2; (-11 \pm \sqrt{105})/4$
 3. $0,5; 2$ 4. $-5; -3$ 5. $1; 2$ 6. $-4; 2$ 7. $\pm 1; 0$ 8. При $a=0$
 x — любое действительное число, при других значениях a реше-
 ний нет.

Раздел 2. 10. При $a=0$ $x \geq -0,25$; при $0 < a < 2$ или
 $x < (-2 - \sqrt{4-2a})/2a$ или $x > (-2 + \sqrt{4-2a})/2a$; при $a \geq 2$ x — лю-
 бое действительное число.

Раздел 3. 1. -10 2. 19 3. ± 3 4. $-1; 2$ 5. 3
 6. $1 < x \leq 4$ 7. $x \leq -1,25; x = -0,25$ 8. $-\sqrt{2}/2; (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
 9. $-\sqrt{3}$ 10. $8; (56 \pm 12\sqrt{21})/7$ 11. При $a < 0$ решений нет; при
 $a=0$ $x=0$ и $x = \pm 2$; при $0 < a < 1$ $x = \pm 1 \pm \sqrt{1-a^2}$; при $a=1$ $x = \pm 1$;
 при $a > 1$ — решений нет 12. $-2 \leq x \leq -1; x=3$
 13. $(-5 + \sqrt{13})/2 < x \leq 1$ 14. $x \geq 3; x \neq (1 + \sqrt{37})/2$ 15. $x \leq 5$;
 $-4/3 \leq x < 4$ 16. $-6 \leq x < 0; 3 < x \leq 4$ 17.
 $-5 \leq x < -4 + \sqrt{4\sqrt{5}-8}$ 18. $x < 0; 1 \leq x \leq 2$ 19. $a=0$;
 $a = \sqrt{17}/2$.

Раздел 4. 1. Имеют 2. $8/7$ 3. 3 4. $1; 4$ 5. -9
 6. $\pm \sqrt{3}/2$ 7. $0,1; 1000$ 8. 4 9. 2 10. 4 11. $3; 9/4$ 12. При
 $a > 0$ $a \neq 2^{-2/3}; a \neq 1$ $x = 2^{2 \log_2 a / (3 \log_2 a + 2)}$, при других значениях па-
 раметра a решений нет.

Раздел 5. 2. $(3m - m^3)/2$ 3. $1/2$ 5. $5\pi/12; 53\pi/84; 59\pi/84$
 6. $\pi k/4$ 7. $(-1)^k \arcsin(2/3) + \pi k$ 8. $\pi(1+2k)/12; 2\pi(3k \pm 1)/12$
 9. $1; \pi(1+2k)/2$ 10. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ 11. $(-1)^k \arcsin \frac{1}{8} + \pi k$;
 $(-1)^k \arcsin \frac{5}{8} + \pi k; (-1)^{k+1} \arcsin \frac{7}{8} + \pi k$ 12. $\pi(3k \pm 1)/3$;
 $\pi(1+2k)/8$ 13. $x = (-1)^{k+1} \operatorname{arctg} 2 + \pi k; y = \pi(1+4k)/4$ 14. Нет
 решений 15. $x = -1; y = \pm 2$.

Раздел 6. 1. 5 прессов 2. 83 3. 14 человек 4. 743 точки
 5. 9 белых и 13 красных роз 6. 24 и 25 7. 9 пятиэтажных
 и 8 девятиэтажных домов 8. 1 второклассник, 5 третьеклассни-
 ков, 4 четырехклассника 9. 11 двоек, 7 троек, 10 четверок,
 2 пятерки 10. 47 11. 8 автобусов 12. 119 человек 13. На 7
 14. 24 и 28 15. 23 человека 16. $x=1, y=37$ 17. $x=9, y=9$ и
 $x=1, y=33$ 18. 1; 5; 0 1; -5; 0 -1; 5; 0 -1; -5; 0
 -1; 0; 5 1; 0; 1 1; 0; 5 20. 0; 2 0; 3 -2; 0.

Раздел 7. 1. $\lg(xe) - 5 \sin 5x + 2^x \ln 2 \cos 2x + 2(\lg x) x^{\lg x - 1}$
 2. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}, \pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}$ 3. 49/4 5. $5\pi/9$ 6. $2x+1$ 7. 4;
 2; 4 объем равен 32 куб. ед. 8. 0; 21; 0; 1 9. $a=9$ 10. $4\sqrt{3}/27$
 11. $c=8$, площадь равна $1/8$.

Раздел 8. 1. 5 2. $6/5$ 3. $1/4$ 4. $7/4$ 5. $(-1 \pm 2\sqrt{2})/7$
 6. 8; 56; 392 7. $a=-12/5, b=-9/5, c=-12/5, d=-16/5$ 11. 10
 14. a .

Раздел 9. 1. При $|a| < 2$ $x = (3a+10)/(-a-2)$; $x = -3$; при
 $a \geq -2$ $x \geq -3$; при $a=2$ $-4 \leq x \leq 3$; при $|a| > 2$ $x = -3$ 2. Суще-
 ствуют 3. -2; -6 6; 2 4. $a \leq 0$ или $a \geq 3$ 5. $b \leq -1$ или $b \geq 4$
 6. 1; 3; 11/12 7. При $a = -2$ корни: -1; 15/17; 17/15; при $a = -1/8$
 корни: $-1/136$; 0; $1/120$ 8. $a < -2$ 9. $a < (\sqrt{5}-1)/2$ или $a > 1$
 10. $-3/4 \leq b \leq 3/4$ 11. $a=2$ 12. $a > -2$ 13. $-4 < a < 17/4$
 14. $-1/4 < a < 0$ 15. $a=18$ 16. $0 < x \leq \sqrt{60}$. При $a = (1+4n)/4k$
 $x = 2k\pi$, при других значениях a решений нет 18. При $a < 0$
 $x = 3 \log_5(-a)$, $x = 2 \log_5(-a)$; при $a=0$ решений нет; при $a > 0$
 $x = 2 \log_5 a$ 19. $a < -2 - \sqrt{6}$ или $a > \sqrt{2}$ 20. $a > (2 + \sqrt{3})/2$
 21. При $a = 1 - \sqrt{2}$ $x = \sqrt{3}$, при других значениях a решений нет
 22. При $a < 0$ $x < \log_2(-a) - 1$; при $a=0$ решений нет; при $a > 0$
 $x < \log_2 a - 2$ 23. $1/3 \leq a \leq 33/32$ 24. При $a \leq 0$ решений нет; при
 $a > 0$. $x = (-1)^k \arcsin(\pm 2^{-\sqrt{(\log 2^3)/2a}}) + k\pi$ 25. $x=1$ 26. $p \geq 1$
 27. При $2 \leq a < 5/2$ или $5/2 < a < 5$ система имеет решения:
 $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3+2a} + \pi k$, $y = \pm \arccos \frac{5+a}{3+2a} + 2\pi n$, $z = \frac{a}{5-a}$
 28. $1/2$; 1 ; $3/2$ 29. $a=1$ 30. $-1/4 \leq a \leq 0$ 31. $a = -3$
 и $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 32. При $a = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; при
 $a = -\arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$; для других значений a
 решений нет 33. $a=2/5$ 34. $a=1$.

Рекомендуемая литература

1. Малая математическая энциклопедия. Будапешт, 1976.
2. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. М., 1968.
3. Сборник задач по математике. Под ред. Сканави М. И.
4. Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М., 1986.
5. Моденов П. С. Сборник задач по математике.

Александр Львович Бобров
Пособие по элементарной математике
для поступающих в вузы

Технический редактор *Е. В. Андрюнина*
Корректор *Н. П. Ненахова*

Сдано в набор 18.04.91	Н/К Подписано в печать 23.05.91	Форм. 60 × 90 ¹ / ₁₆
Бум. газетная	Гарнитура Таймс	Офсетная печать
Объем 7,5 п. л.	Кр.-отт. 7,625	Уч.-изд. л. 7,0
Тираж 30 000 экз.	Заказ тип. № 266	Бесплатно

Издательство и типография «Прейскурантиздат»
125438, Москва, Пакгаузное шоссе, 1

